

# SPACE CHARGE EFFECTS in J-PARC MR: LATTICE X-Y COUPLING

Kazuhito Ohmi <sup>#,A)</sup>, Shuichiro Hatakeyama<sup>B)</sup>, Yoichi Sato<sup>A)</sup>

<sup>A)</sup> KEK, High energy accelerator research organization

1-1 Oho, Tsukuba, Ibaraki, 305-0801

<sup>B)</sup> JAEA, Japan Atomic Energy Agency

4-49 Muramatsu, Tokai, Ibaraki, 319-1112

## Abstract

Emittance growth and beam loss due to the space charge force are enhanced by errors of the lattice. Nonlinearity of the space charge force and lattice elements is integrated with Twiss and x-y coupling parameters into one turn map. Twiss and x-y coupling parameters are measurable quantities. We study space charge effects with the measured Twiss-coupling parameters.

## J-PARC MR での空間電荷効果： x-y 結合の影響

### 1. はじめに

加速器におけるビーム分布は加速器の線形、非線形ラティスの構造による。ビーム分布による非線形な空間電荷力はラティス構造を歪め、準平衡分布に達する。その分布は一般に完全な平衡分布ではなく、空間電荷、ラティスの非線形力によりエミッタンスが大きくなりビームロスが起こる。ここではエラーなどにより x-y 結合が存在するラティスでの空間電荷効果を論じる。ビーム分布は加速器内の進行位置  $s$  に対して 4 次元位相空間  $x, p_x, y, p_y$  内で傾く。空間電荷力は 2 次元実空間  $(x, y)$  での傾いた楕円体分布により生じる。傾いた座標での空間電荷力は加速器のチューンによって特徴づけられた(線形)ノーマルモードに対して、4 次元位相空間構造に応じた作用を与える。線形ノーマルモードも x-y 結合も空間電荷力により歪みを受ける。

エミッタンス増大、ビームロスは空間電荷力による非線形共鳴周辺のカオスの振る舞いにより起こる。共鳴はラティス変換に内在するものもあれば空間電荷力を起源とするものもある。ラティス起源の非線形共鳴も空間電荷の非線形共鳴もその非線形成分の強さと線形ラティスによる  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\beta$  位相、x-y 結合を考慮した積分によって決まる。

それらの線形ラティスパラメータは測定することができる。周回変換における積分した非線形成分はその測定値によって評価できる。その線形パラメータの設計値からのずれがビームロス等に影響するのであれば、それらを補正することで、設計のビームロス(最小値であろう)を達成できると期待できる。

### 2. ラティスと空間電荷

空間電荷力を考慮した周回変換は以下で表される。

$$\mathcal{M}(s) = \prod_{i=0}^{N-1} \mathcal{M}_0(s_{i+1}, s_i) e^{-i\Phi(s_i)} \quad (1)$$

ここで  $\mathcal{M}(s, s)$  は  $s_i$  から  $s_{i+1}$  へのラティス変換であり、

$\Phi(s_i)$  は  $s_i$  でのビーム分布による空間電荷ポテンシャルで、その変換の記号表現は以下を表す。

$$e^{-i\Phi(s_i)}: \mathbf{p} = \mathbf{p} - \frac{\partial \Phi(s_i)}{\partial \mathbf{x}} \quad (2)$$

$\Phi(s_i)$  は実座標の関数であるが、ノーマルモードで表せば、運動量依存ももつ。変換は連続的であるべき ( $N \rightarrow \infty$ ) だが、ステップをベータatron位相の変化を小さくするようにすれば、連続と見なすことができる、すなわち  $\Delta s \ll \beta$  であればよい。

ラティスと空間電荷の変換を分けて表し、ラティス部分  $\mathcal{M}_0$  をさらに線形変換  $M_0$  と非線形変換  $\mathcal{M}_{nl}$  に分けて考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(s) &= \mathcal{M}_0(s) \mathcal{M}_{sc}(s) \\ \mathcal{M}_0(s) &= M_0(s) \mathcal{M}_{nl}(s) \end{aligned} \quad (3)$$

非線形変換は以下で表される。

$$\mathcal{M}_{nl}(s) = \prod_{i=0}^{N_{nl}-1} M_0^{-1}(s_i, s) e^{-iH_{nl}} M_0(s_i, s) \quad (4)$$

$H_{nl}$  は非線形磁石の変換 Hamiltonian で、6 極磁石の場合  $H_{nl} = K_2(x^3 - 3xy^2)/6$  である。具体的な変換は式(2)と同様である。

ビームの分布は線形変換で概ね決まる。空間電荷の変換自体もラティスの変換による。

$$\mathcal{M}_{sc}(s) = \prod_{i=0}^{N-1} \mathcal{M}_0^{-1}(s_i, s) e^{-i\Phi(s_i)} M_0(s_i, s) \quad (5)$$

空間電荷とラティス非線形の干渉を無視すれば、非線形変換  $\mathcal{M}_0$  を線形変換  $M_0$  に置き換えられる。ラティスの線形変換  $M_0$  を記述する Twiss パラメータとベータatron位相、は測定可能な量である。以下で論じる x-y 結合パラメータも広義の Twiss パラメータと考えられ測定可能である。ラティス非線形と空間電荷の変換を測定された線形変換と組み合わせ周回変換[式(1)]を構築することができる。

具体的にラティスの線形変換  $M_0$  は以下のようにパラメトライズする。

$$M_0(s) = R(s)^{-1} M_{2 \times 2}(s) R(s)$$

$$M_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_y \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$M_i = \begin{pmatrix} \cos \mu_i + \alpha_i \sin \mu_i & \beta \sin \mu_i \\ -\gamma_i \sin \mu_i & \cos \mu_i - \alpha_i \sin \mu_i \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} r_0 & 0 & -r_4 & r_2 \\ 0 & r_0 & r_3 & -r_1 \\ r_1 & r_2 & r_0 & 0 \\ r_3 & r_4 & 0 & r_0 \end{pmatrix}$$

x-y 結合パラメータ  $r_1$ - $r_4$  も  $s$  の関数で広義の Twiss パラメータと考えることができる。

クーランシュナイダー不変量は以下で表される。

$$W_{x,y} = 2J_{x,y} = \mathbf{x}^T A_{x,y}^R \mathbf{x} \quad (7)$$

$$A_i^R \equiv R^{-1} S_4 A_i R$$

$$A_x = \left( \begin{array}{cc|c} \gamma_x & \alpha_x & 0 \\ \alpha_x & \beta_x & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad A_y = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y & \alpha_y \\ \hline 0 & \alpha_y & \beta_y \end{array} \right)$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで  $\mathbf{x}^T = (x, p_x, y, p_y)$  である。

### 3. Twiss パラメータ測定

J-PARC では1つの方法として、x-y 結合パラメータを含む Twiss パラメータの測定に turn-by-turn モニターを使用している。入射エラーを x-y それぞれに与え、x-y それぞれのモードのベータatron振動を測定する。振幅( $W_x, W_y$ )の単粒子のベータatron振動は  $y, p_y$  空間にもれ出す。チューンは  $y, p_y$  空間に振動が現れても  $v_x$  である。

$$\delta(\mathbf{x}^T A_x^R \mathbf{x} - W_x) \delta(\mathbf{x}^T A_y^R \mathbf{x} - W_y) \quad (8)$$

で表され、一方の  $W$  だけで励起した場合( $W_x$ )、位相空間内で楕円曲線を描く。その際振動はモニターで測定された位相空間トラジェクトリーの例を図1に示す。

位相空間楕円曲線の2次モーメントから Twiss パラメータが決定できる。つまり式(9)と実験データを比較して求める。[1,2]

$$\langle \mathbf{x} \mathbf{x}^T \rangle = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{x} \mathbf{x}^T \delta(\mathbf{x}^T A_x^R \mathbf{x} - W_x) dx \quad (9)$$

$$= \begin{pmatrix} \mu^2 \beta_x & & & \\ -\mu^2 \alpha_x & \mu^2 \gamma_x & & \\ \mu(-\beta_x r_1 + \alpha_x r_2) & \mu(\alpha_x r_1 - \gamma_x r_2) & \beta_x r_1^2 - 2\alpha_x r_1 r_2 + \gamma_x r_2^2 & \\ \mu(-\beta_x r_3 + \alpha_x r_4) & \mu(\alpha_x r_3 - \gamma_x r_4) & \beta_x r_1 r_3 - \alpha_x(r_1 r_4 + r_2 r_3) + \gamma_x r_2 r_4 & \beta_x r_3^2 - 2\alpha_x r_3 r_4 + \gamma_x r_4^2 \end{pmatrix}$$

この平均は単粒子あるいは重心の運動の時間平均で

ある。モニター間のベータatron位相は2つのモニターの振動相関から求めることができる。

$$\cos \Delta\phi_x = \frac{2\langle x_i x_{i+1} \rangle}{\sqrt{\langle x_i^2 \rangle \langle x_{i+1}^2 \rangle}} \quad (10)$$

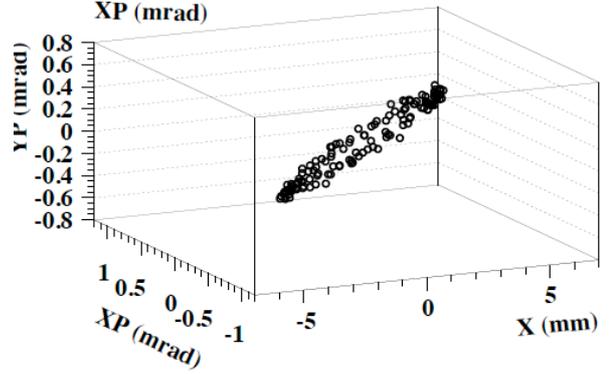


図1 位相空間トラジェクトリーの例、4次元を3次元( $x, p_x, p_y$ )に射影して図示。

### 4. ビームエンベロープ

空間電荷力を線形で近似すれば、ビームの分布は楕円体を記述する2次モーメント(ビームエンベロープ)で表現できる。ビームエンベロープは式(9)と違い、ビーム粒子の位相平均をとったものである。

$$\langle \mathbf{x} \mathbf{x}^T \rangle \quad (11)$$

エンベロープは線形周回変換に対して、以下のように変換される。

$$M(s) \langle \mathbf{x}(s) \mathbf{x}^T(s) \rangle M^T(s) \quad (12)$$

空間電荷を含む線形変換は以下で表され、

$$M(s) = \prod_{i=0}^{N-1} M_0(s_{i+1}, s_i) M_\Phi(s_i) \quad (13)$$

空間電荷力による線形変換は以下である。

$$M_\Phi(s_i) = T^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_y & 1 \end{pmatrix} T(\theta) \quad (14)$$

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

線形力  $k$  は

$$k_x = \frac{4r_p \lambda}{\beta^2 \gamma^2} \frac{1}{a(a+b)} \quad k_y = \frac{4r_p \lambda}{\beta^2 \gamma^2} \frac{1}{b(a+b)} \quad (15)$$

ビームの実空間回転角、楕円の固有軸方向のサイズ  $a, b$  は

$$\tan 2\theta = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle - \langle xy \rangle^2} \quad (16)$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{\langle xy \rangle}{\sin 2\theta (\langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle - \langle xy \rangle^2)}$$

から決まる。

そこで周期条件を課することで平衡エンベロープを求める。

$$M(s) \langle \mathbf{x}(s) \mathbf{x}^T(s) \rangle M^T(s) = \langle \mathbf{x}(s) \mathbf{x}^T(s) \rangle \quad (17)$$

$M$  にエンベロープが含まれるので、自己矛盾の無い解を求める。この場合線形なので平衡解が求められる。エンベロープは線形近似なので、線形共鳴、整数、半整数、が評価対象となる。

#### 4.1 線形結合共鳴補正

線形周回変換は以下のように表せる。

$$M(s) = M_0(s) \prod_{i=0}^{N-1} M_0^{-1}(s_i, s) M_{\Phi}(s_i) M_0(s_i, s) \quad (18)$$

積で表された項は空間電荷力による線形効果を 1 周分まとめた行列である。

$M_0$  は前述のように位相空間構造(Twiss parameter)とチューンで表されるので、観測可能量である。Skew Q 成分が含まれている場合、以下のように表される。

$$M_0(s) = M_{2 \times 2}(s) \prod_{i=0}^{N-1} M_{2 \times 2}^{-1}(s_i, s) M_{SQ}(s_i) M_{2 \times 2}(s_i, s) \quad (19)$$

$$M_{SQ}(s_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この  $M_{2 \times 2}$  は、同様に区対角化されていて、線形共鳴から離れていれば、近似的に式(6)に等しい。

積の部分は Skew Q 成分を 1 周分まとめたものである。

$$\prod_i^{N_{SQ}-1} M_0^{-1} M_{SQ} M_0 \approx B_0 \begin{pmatrix} I_2 & P_{SQ} \\ S_2 P_{SQ}^t S_2 & I_2 \end{pmatrix} B_0^{-1}$$

$$P_{SQ} = \begin{pmatrix} -S_+ - S_- & C_+ - C_- \\ C_+ + C_- & S_+ - S_- \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$S_{\pm} = \frac{1}{2} \int_s^{s+L} k \sqrt{\beta_x \beta_y} \sin \phi_{\pm} ds$$

$$C_{\pm} = \frac{1}{2} \int_s^{s+L} k \sqrt{\beta_x \beta_y} \cos \phi_{\pm} ds$$

$$\phi_{\pm} = \phi_x \pm \phi_y$$

和共鳴補正、差共鳴補正はそれぞれ以下である。

$$\begin{aligned} S_+ &= C_+ = 0 \\ S_- &= C_- = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

対応する  $r$  の設定は  $M_0$  から求められる。

## 5. 非線形ラティス、非線形空間電荷力

周回変換に対するラティスの非線形成分による寄与は以下のように表される。

$$\mathcal{M}_{nl}(s) = \prod_{i=0}^{N_{nl}-1} M_0^{-1}(s_i, s) e^{-:H_{nl}:} M_0(s_i, s) \quad (22)$$

一般的に加速器は skew 共鳴がないように設計されている ( $H_{nl} \sim \text{Re}(x+iy)^n$ )。Skew 成分 ( $\text{Im}(x+iy)^n$ ) は 6 極磁石が傾いて設置されていたり、6 極の場所 ( $s_i$ ) で x-y 結合がある場合に発生する。6 極の設置エラーは測量に頼るが、x-y 結合からの寄与は測定された Twiss parameter,  $\alpha$ 、 $\beta$ 、r1-r4 から評価できる。

$$\begin{aligned} R \mathcal{M}_{nl} R^{-1} &= \prod_{i=0}^{N_{nl}-1} M_{2 \times 2}^{-1}(s_i, s) R(s_i) e^{-:H_{nl}:} R^{-1}(s_i) M_{2 \times 2}(s_i, s) \\ &= \prod e^{-:H_{N,i}:} \end{aligned} \quad (23)$$

$H_{N,i}$  は  $H_{nl}$  において  $s_i$  での x,y を以下の関係を使い  $s$  での  $x, p_x, y, p_y$  で表したものである。

$$\mathbf{x}(s_i) = R^{-1}(s_i) M_{2 \times 2}(s_i, s) R(s) \mathbf{x}(s) \quad (24)$$

Skew 成分は  $s_i, s$  での  $\alpha$ 、 $\beta$ 、r1-r4 から決まる。非線形をすべてまとめ上げたものは非常に複雑で高次項まで含む。その項に応じた共鳴が現れる。

ビーム分布は空間電荷力と主に線形ラティスにより決まる。その分布による非線形変換は空間電荷力の移送をラティス線形移送に置き換えて以下のように表せる。

$$\mathcal{M}_{sc} \approx \prod_{i=0}^{N-1} M_0^{-1}(s_i, s) e^{-:\Phi(s_i):} M_0(s_i, s) \quad (25)$$

ビームが傾いていれば  $\Phi$  に Skew 成分が含まれる。また非線形ラティスの場合と同様 x-y 結合があるとやはり Skew 成分が現れる。

こういった効果の評価はシミュレーションによって行われている。一般的にはラティスに磁石の据え付けエラーを入れ、軌道補正し、空間電荷シミュレーションを行っている。ここでは測定した Twiss parameter に対する、空間電荷効果を調べる。Twiss parameter のずれからくるラティスの非線形効果、空間電荷効果をそれぞれ分離して扱い、その影響をそれぞれに評価することで、エミッタンス増大のメカニズムを理解し高強度の達成に必要な条件を調べる。

## 6. 測定例とその空間電荷効果

図 2 に x-y 結合パラメータ r1-r4 の測定例を示す。

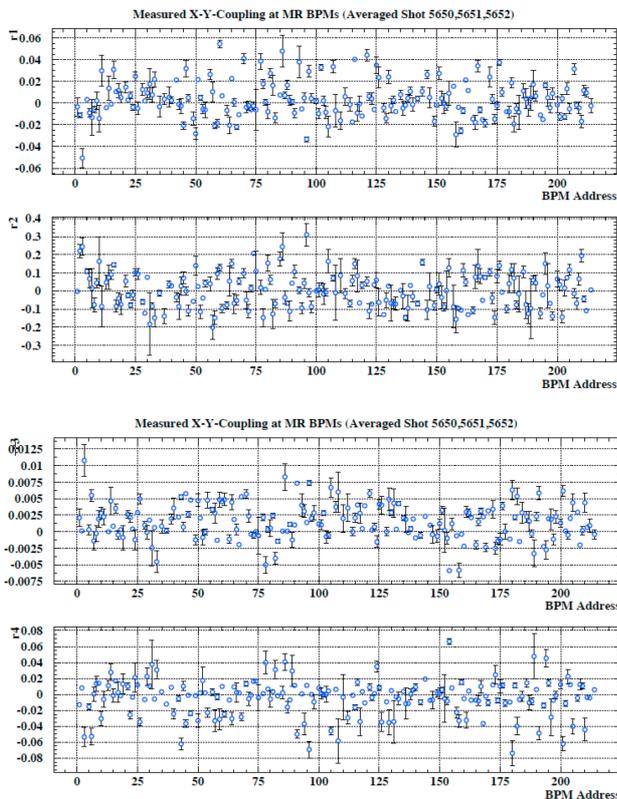


図 2: x-y 結合の測定例。

この実測した x-y 結合パラメータを設計ラティスを付加して、空間電荷シミュレーションを行った結果が図 3 である。この程度の x-y 結合はビームロスには影響しないようである。この計算では  $\beta$  は測定値を使っていない。

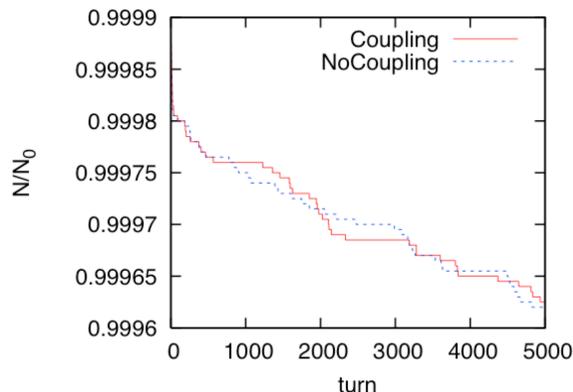


図 3: 図 2 の x-y 結合を設計ラティスに付加した空間電荷シミュレーションによるビームロス。

次の例(図 4)は x-y 結合が図 1 に対して 2 倍程度悪い場合を扱う [3]。図 5 に空間電荷効果のシミュレーションによる x-y それぞれのエミッタンスの増大を示す。青線が設計ラティス。マゼンタが空間電荷のみ x-y 結合を付加した場合、赤線がさらに非線形磁石での x-y 結合も考慮した場合である。青とマゼン

タ線の差に x-y 結合の空間電荷への影響がみられる。さらに赤線に非線形磁石での x-y 結合、Twiss エラーの影響が見られる。

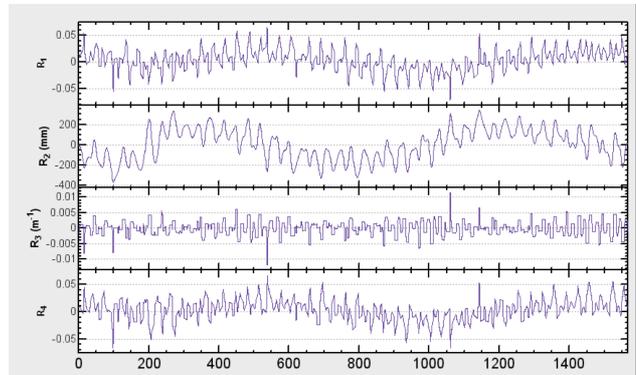


図 4 x-y 結合が図 2 の 2 倍程度悪い例。

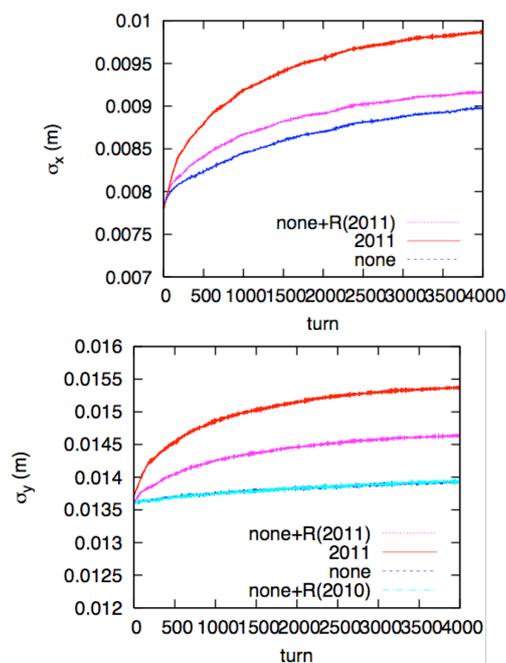


図 5: 図 4 のラティスのエミッタンス増大。上-下図は x-y 方向ビームサイズの時間変化。青線が設計ラティス。マゼンタが空間電荷のみ x-y 結合を付加した場合、赤線がさらに非線形磁石での x-y 結合も考慮した場合。

## 7. まとめ

測定による Twiss-R パラメータをベースに空間電荷効果の評価手法を確立した。空間電荷、非線形磁石それぞれでの Twiss-R エラーの効果を見ることができつつある。その Twiss-R エラーを補正することで設計ラティスでの最小のビームロスが実現できると期待できる。

測定に関してはモニターの設置精度、測定精度を上げていく必要がある。

## 参考文献

- [1] Y. Ohnishi et al., Phys. Rev. ST-AB, 12 (2009) 091002.
- [2] K. Ohmi et al., Proceeding of IPAC2010, Kyoto, Japan, May. 23-28, 1539.
- [3] K. Ohmi et al., Proceeding of IPAC2012, New Orleans, USA, May. 21-25, 2012.