Orbit and Optics Correction to Realize Designed Machine Performance

Yuji Seimiya[#,A)], Kazuhito Ohmi[B)], Kamada Susumu[B)], Akio Morita[B)], Katsunobu Oide[B)]
[A)] SOKENDAI, [B)] KEK
1-1 Oho, Tsukuba, Ibaraki, Japan, 305-0801

Abstract
It is difficult for actual accelerators to achieve the designed machine performance without appropriate correction or adjustment of magnet errors. By correction of magnet errors, we aim to be realized the designed machine performance. However, it is not easy to estimate the design orbit in real accelerators. In KEKB and PF, beam position monitor (BPM) can be calibrated to the center of quadrupole magnet (QM). BPM and QM parallel displacement error referring to design orbit can be estimated using assumption that these errors are coincident. This is, design orbit at BPM and QM can be derived.

設計上の機械性能を実現させるための軌道、光学補正

1.　QM の平行移動誤差の推定方法

適切な軌道、光学補正や磁石のエラーを補正しない限り、現実の加速器で設計性能を再現することは難しい。ここでは、磁石のアライメントエラーを補正することで、設計性能の実現を目指していく。しかし、BPM や磁石がそれぞれアライメントエラーを持っている現実の加速器において、設計軌道を推定することは簡単ではない。

KEKB や PF では、BPM は QM の磁場中心にあわせるよう調整されている。実は、BPM と QM の平行移動誤差が同期している場合、設計軌道を推定することができる。

図 1 のように BPM と QM の平行移動誤差が同期している際、次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{x_{COD}} = \boldsymbol{x_{BPM}} + \boldsymbol{x_Q} \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_Q}). \tag{1}$$

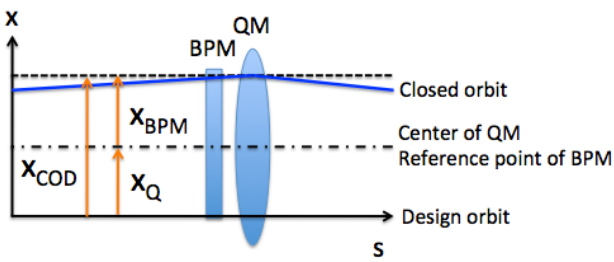

図 1: QM、BPM、設計軌道、COD の位置関係

$\boldsymbol{x_{COD}}$はCOD、$\boldsymbol{x_{BPM}}$はBPMの測定値、$\boldsymbol{x_Q}$はQMの平行移動誤差を表す。$\boldsymbol{x_{BPM}}$はターンバイターンデータから、ラティス関数$\boldsymbol{f}$はデザインラティスから知ることができるため、$\boldsymbol{x_Q}$はN次元のニュートンラプソン法によって推定することができる。反復計算は以下を用いればいい。

$$\boldsymbol{x_Q^{k+1}} = \boldsymbol{x_Q^k} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_Q^k})}{\partial \boldsymbol{x_Q^k}} - \boldsymbol{I}\right)^{-1} \left\{-\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_Q^k}) - \boldsymbol{x_Q^k}\right) + \boldsymbol{x_{BPM}}\right\}. \tag{2}$$

$\boldsymbol{k}$ は反復回数、$\boldsymbol{I}$は単位行列を表す。ベクトルは水平方向だけでなく、垂直方向も含んでいる。

2.　条件数

平行移動誤差$\boldsymbol{x_Q}$を推定する際、逆行列を計算する必要がある。この時、条件数が重要な役割を果たす[1]。条件数はエラーがどの程度伝搬するかを表す量である。一般的に、条件数は特異値の最大÷特異値の最小で与えられる（特異値は 0 以上の値を取る）。条件数が大きい場合には、推定した量が本当の値と大きく食い違ってしまうことが多い。このような場合は、特異値に対してしきい値を設定することで近似値を得られることがある。特異値の打ち切り方にはいくつか方法があるが、ここでは以下を採用する。

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_i \ (\omega_{min}/\varepsilon > \omega_i) \\ 0 \ (\omega_{min}/\varepsilon \leqq \omega_i) \end{cases}. \tag{3}$$

εはしきい値、ω_iは逆行列の特異値、ω_{min}は最小の特異値を表す。

3.　磁石のエラーの推定

QM の平行移動誤差$\boldsymbol{x_Q}$、回転誤差$\boldsymbol{\Delta\theta_Q}$、磁場誤差$\boldsymbol{\Delta k_Q}$、6 極磁石の平行移動誤差$\boldsymbol{x_S}$が存在する場合について、シミュレーションする。この際、BPM と QM の平行移動誤差は一致しているとする。シミュレーションの手順は以下を用いる。

- まず、上記の 4 種類の誤差を SAD[2]を用いて SuperKEKB のデザインラティスに与える。ここでは、この与えた誤差の値を「設定値」と呼ぶことにする。これらのエラーはガウス乱数で発生させ、その大きさは典型的な誤差の量$(x_Q, \Delta\theta_Q, \Delta k_Q/k_Q, x_S) = (5\times10^{-5}\mathrm{m}, 4\times10^{-5}\mathrm{m}, 3\times10^{-4}\mathrm{rad}, 7\times10^{-4})$ を用いる[3]。

#seimiya@post.kek.jp

- 次に、セクション 1 で記述した方法を用いて平行移動誤差$\boldsymbol{x_Q}$を推定し、推定量だけ QM の平行移動誤差を補正する。
- さらに、平行移動誤差を軌道から推定した方法と同様の方法を用いて、オプティクスパラメータから$\Delta\boldsymbol{\theta_Q}$、$\Delta\boldsymbol{k_Q}$、$\boldsymbol{x_S}$を推定する。そして、それぞれの推定量だけ誤差を補正し、最終的にエミッタンスがどの程度小さくできるかを確認する。

当然のことながら、設定値は知らないものとして磁石の誤差を推定する。

3.1 QM の平行移動誤差の推定

大きなエラーがある場合、特異値にしきい値を設定してもニュートンラプソン法が収束しないことがある。特に非線形性が大きい SuperKEKB では問題となるが多い。このような場合は、推定に用いるラティスをなるべく線形化するよう書き換えて QM 平行移動誤差を推定し、その後に元の線形化していないラティスを用いて再度推定することで収束させられることがある。

図 2 は QM の平行移動誤差の推定値と設定値との比較を表す。$\boldsymbol{x_Q}$を推定する際は、$\Delta\boldsymbol{\theta_Q}$、$\Delta\boldsymbol{k_Q}$、$\boldsymbol{x_S}$が存在していても、推定がうまくいっていることがわかる。つまり、これら 3 種のエラーは SuperKEKB において軌道に大きな影響を与えないことを意味している。

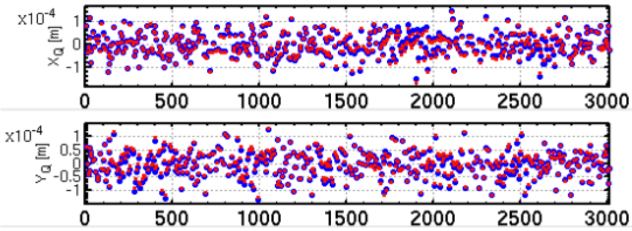

図 2: QM の平行移動誤差。青点は設定値、赤点は推定値を表す。横軸は進行方向、縦軸は平行移動誤差の大きさを表す。

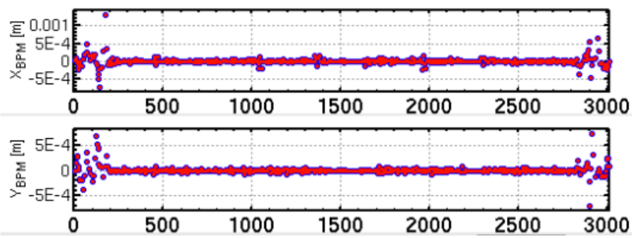

図 3: BPM の測定値。設定した QM の平行移動誤差が存在する際の BPM の測定値が青、推定した QM の平行移動誤差がある際の BPM の測定値が赤。

3.2 QM の回転誤差、磁場誤差、6 極の平行移動誤差の推定

QM の回転誤差、磁場誤差、6 極の平行移動誤差の推定方法は QM の平行移動誤差の推定方法とほぼ同じである。QM の平行移動誤差の推定には、

$$\boldsymbol{x_{BPM}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_Q}) - \boldsymbol{x_Q}. \quad (5)$$

にニュートンラプソン法を適用したが、QM の回転誤差、磁場誤差、6 極の平行移動誤差は軌道ではなく、オプティクスに影響を与えるためオプティクスパラメータからそれぞれの誤差を推定する。

$$(\boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{\beta_x}, \boldsymbol{\beta_x}, \boldsymbol{\eta_y}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta_Q}, \boldsymbol{k_Q}, \boldsymbol{x_S}). \quad (6)$$

R1 は x-y カップリングパラメータの 1 つ、β_xとβ_yはそれぞれ水平、垂直ベータ関数、η_yは垂直ディスパージョンを表す。

図 4 は 6 極の平行移動誤差の推定値と設定値との比較を表し、図 5 は設定誤差がある際のオプティクスと推定誤差がある際のオプティクスの比較を表す。図 4 の推定値は設定値と大きく食い違っているが、図 5 のオプティクスはよく一致している。BPM は QM の数しか用意していないため、オプティクスの変化が 3 種の誤差の内どの誤差から生じているか判別できないためである。正しく推定できないことが問題のように思えてしまうかもしれないが、ビームが通る軌道の非線形性が小さいならば、図 4 で推定した量だけ変化させればオプティクスは補正できる。つまり、非線形性の小さい軌道を探すことが重要であり、その 1 つのアプローチがオプティクス補正の前に QM の平行移動誤差を推定することである。

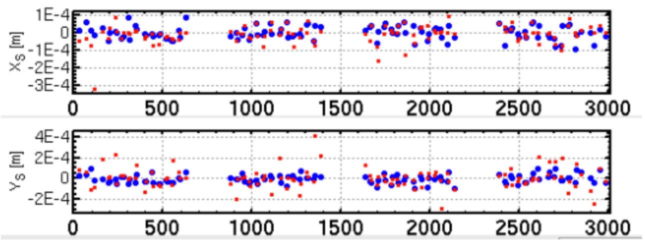

図 4: 6 極の平行移動誤差。青点は設定値、赤点が推定値。

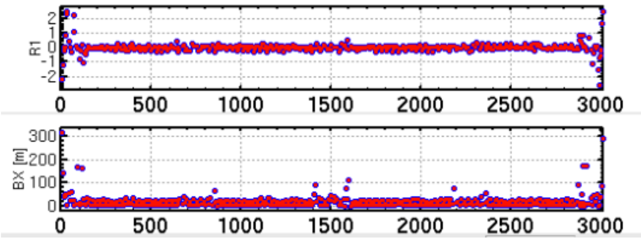

図 5: 設定誤差がある際のオプティクス（青）と推定誤差がある際のオプティクス（赤）の比較。R1 は x-y カップリングパラメータ、BX は水平ベータ関数を表す。

図６は軌道、オプティクスを補正する前と後のオプティクスパラメータを表す。R_1とη_yは補正前非常に大きいが、補正後はほとんど零になっている。

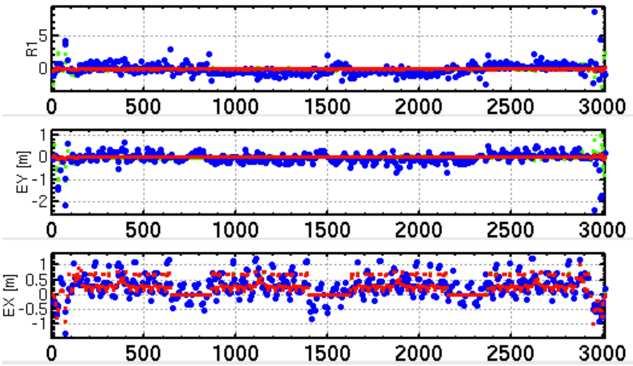

図６: 軌道、オプティクスを補正する前（青）と補正した後（赤）との比較。EX と EY は水平、垂直ディスパージョンを表す。

3.3　補正前後のエミッタンス比較

表 1、2、3は、乱数の種を変えてシミュレーションしたときの補正前のエミッタンス、軌道補正後のエミッタンス、軌道、光学補正後のエミッタンスを表す。SuperKEKB の LER デザインラティスにおける設計エミッタンスは $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) = (3.0\times10^{-9}, 9.1\times10^{-13}, 4.1\times10^{-6})$m である。垂直エミッタンスの目標値はおおよそ$6{\sim}7\times10^{-12}$m である。表 2 から QM の平行移動誤差を推定し、軌道補正しても十分垂直エミッタンスを小さくできていないことが分かる。軌道、オプティクス補正後は十分エミッタンスを小さくすることができている。

表 1: 補正前のエミッタンス

ε_x [m]	ε_y [m]	ε_z [m]
1.5×10^{-8}	3.5×10^{-9}	4.4×10^{-6}
1.4×10^{-8}	3.9×10^{-9}	4.0×10^{-6}
1.5×10^{-8}	2.8×10^{-9}	4.2×10^{-6}

表 2: 軌道補正後のエミッタンス

ε_x [m]	ε_y [m]	ε_z [m]
3.2×10^{-9}	1.4×10^{-11}	4.1×10^{-6}
3.9×10^{-9}	9.3×10^{-11}	4.1×10^{-6}
3.4×10^{-9}	1.3×10^{-10}	4.1×10^{-6}

表 3: 軌道、光学補正後のエミッタンス

ε_x [m]	ε_y [m]	ε_z [m]
3.0×10^{-9}	2.3×10^{-12}	4.1×10^{-6}
3.0×10^{-9}	2.2×10^{-12}	4.1×10^{-6}
3.1×10^{-9}	1.3×10^{-12}	4.1×10^{-6}

4.　軌道補正しない場合のエミッタンス

図 7 は補正前のオプティクスと軌道補正せずに光学補正した後のオプティクスの比較を表す。

オプティクス補正を行ってもオプティクスはよくなっていない。これは、ビームが非線形性の大きい軌道を通っているためオプティクス補正を使用としてもうまくいっていないためである。このとき、表４で示すように垂直エミッタンスは非常に大きいままである。

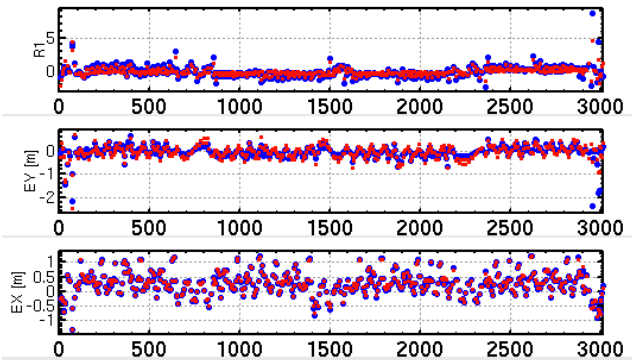

図 7: 光学補正後（赤）と補正前（青）のオプティクスの比較

表 4: 光学補正のみした場合のエミッタンス

ε_x [m]	ε_y [m]	ε_z [m]
1.4×10^{-8}	3.3×10^{-9}	4.3×10^{-6}
1.3×10^{-8}	5.3×10^{-9}	4.1×10^{-6}
1.4×10^{-8}	3.1×10^{-9}	4.2×10^{-6}

5.　BPM と QM の間の誤差、2 極磁石の回転誤差、磁場誤差の考慮

PF リングについて QM の平行移動誤差、回転誤差、磁場誤差、6 極磁石の平行移動誤差、2 極磁石の回転誤差、磁場誤差、BPM と QM の間に誤差が存在する場合について、セクション 3 で記述した方法と同様に軌道、光学補正し、エミッタンスを計算する。図８は QM、6 極に加えて 2 極に回転誤差、磁場誤差がある場合の水平エミッタンス、垂直エミッタンス、QM の平行移動誤差の残差を、図９は QM、6 極に加えて BPM と QM の間に誤差がある場合である。10 種の乱数を用いている。

2 極磁石に誤差がある場合、QM の水平移動誤差の残差が 2 極の誤差の大きさと共に増えているのに対し、QM の垂直移動誤差は変化が小さいため垂直エミッタンスはそれほど大きく増えていない。QM、6 極に加えて BPM と QM の間に誤差がある場合には、QM の水平、垂直移動誤差の残差は、BPM と QM の間の誤差の大きさに比例して増えているように見える。そのため、垂直エミッタンスは BPM と QM の間の誤差が 50μm のとき、垂直エミッタンスは約 20pm 程度になる。このときの水平エミッタンスは約 50nm 程度であるため、カップリングは 0.1%以下であり、十分補正できていることになる。

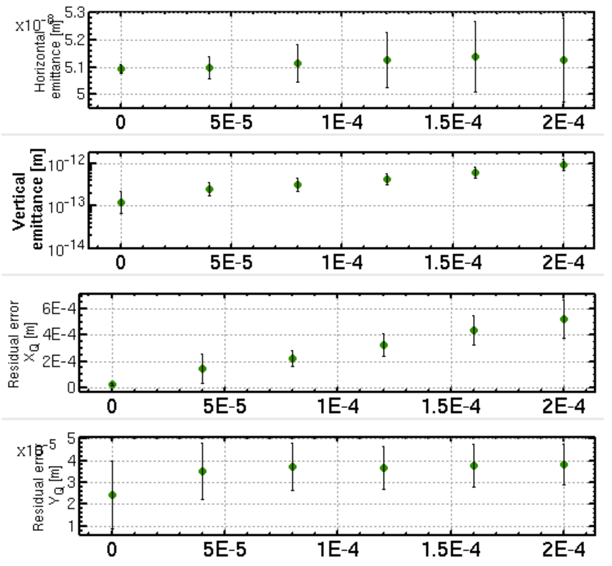

図 8: QM、6 極に加えて 2 極に回転誤差、磁場誤差がある場合（PF）（横軸：Δk/k、θ mrad）

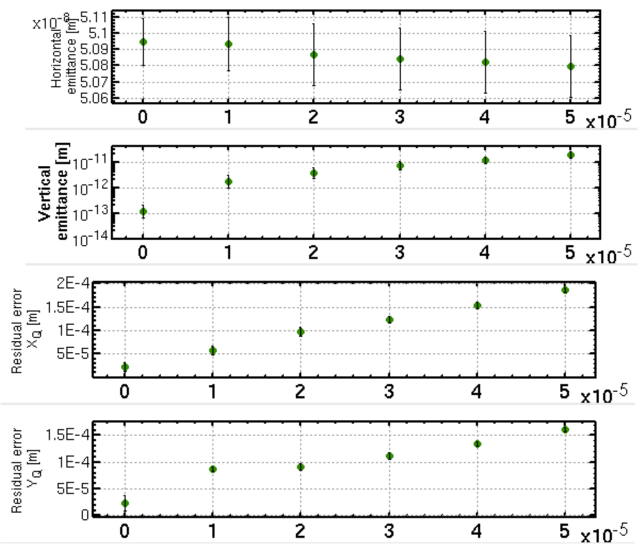

図 9: QM、6 極に加えて BPM と QM の間に誤差がある場合（PF）（横軸：m）

6. CONCLUSION

SuperKEKB において QM に平行移動誤差、回転誤差、磁場誤差、6 極に平行移動誤差があるときについて考えてきた。これらの誤差を軌道、オプティクスから推定することで垂直エミッタンスを十分小さくすることができた。しかし、QM の平行移動誤差を補正せずにオプティクス補正することは、議論してきた方法では難しい分かった。非線形性の大きい SuperKEKB において QM の平行移動誤差を補正することは重要であるといえる。

PF リングでは、QM、6 極に加え 2 極の回転誤差、磁場誤差、BPM と QM の間の誤差を考慮した。このとき、BPM と QM の間の誤差が最も垂直エミッタンスを大きくしているが、一般的な大きさである 50μm でカップリングが 0.1%以下であることから十分小さくすることができていることが分かる。

参考文献

参

[1] William H. Press, et al., ”NUMERICAL RECIPES IN C”, section 2.9.

[2] http://acc-physics.kek.jp/SAD/

[3] KEK Preprint 2001-157 December 2001 A, ”KEKB Accelerator Papers”.