有限な厚みをもつ２次元抵抗性壁面インピーダンス –その数学的構造と物理的意味–

TWO-DIMENSIONAL RESISTIVE-WALL IMPEDANCE WITH FINITE THICKNESS: ITS MATHEMATICAL STRUCTURES AND THEIR PHYSICAL MEANINGS

菖蒲田義博
Yoshihiro Shobuda *, J-PARC Center, JAEA&KEK, 2-4 Shirakata, Tokaimura, Nakagun, Ibaraki 319-1195, JAPAN

Abstract

Two-dimensional resistive-wall impedance of cylindrical chambers with a finite thickness decreases proportionally to the frequency when the skin depth is greater than the chamber thickness. The phenomenon is typically interpreted that the electro-magnetic fields leak out of the chamber over the frequency range. However, the relation among the resistive-wall impedance, the space charge impedance, and the leakage fields from the chamber is not clear. This study provides a more comprehensive picture of dealing with them simultaneously.

1． はじめに

内面を窒化チタンでコーティングしたセラミックブレークのインピーダンスは、窒化チタンの抵抗項、セラミックの変位電流項、セラミックブレークからの放射項の並列回路で表現できる [1,2]。そのため、このインピーダンスは、

1. 窒化チタンの厚さがスキンデプスより大きい場合、「抵抗性インピーダンス」[3]
2. スキンデプスが窒化チタンの厚さより大きい場合、「直流抵抗」[4]
3. 窒化チタンの厚さが極端に薄く (数 nm 程度) なって初めて、「放射場インピーダンス」[5]

になることが自然に理解できる。これは、セラミックブレークのインピーダンスが、ビームのエネルギー損失を最小化するように決まるからである。

同様に、文献 [6] には、「相対論的ビームに対する有限の厚みをもつ円筒型抵抗性チャンバーの低周波側での縦方向インピーダンスは、DC 抵抗とチャンバー壁の外側を流れる変位電流によるインダクタンスの並列回路で記述できる。」とある。

しかし、この式の適用条件はあまり明確ではない。なぜなら、このインピーダンスは、周波数原点に向かって単調にゼロに近づくが [7]、スキンデプスがチャンバー厚より大きい場合でも、DC 抵抗が主要な役割を果たす周波数領域が存在しないからである。

そこでこのレポートでは、抵抗性チャンバーの外側に意図的に完全導体のチャンバーを導入することで、より適切な回路モデルを提示する。これにより、「抵抗性チャンバーのビームのインピーダンスは、壁電流が感じる抵抗性チャンバーのインピーダンス、完全導体と抵抗性チャンバー間のインピーダンス、ビームの空間電荷効果のインピーダンスの合成抵抗」で記述されることが明示される。

最後に、文献 [6] の回路モデルの欠点を明示する。

2． 従来の抵抗性インピーダンスの表式

内半径 a、厚さ t、長さ $\mathcal{L}$、電気伝導率 σ_{2c}、比誘電率 ϵ'、比透磁率 μ' の 2 次元円筒形チャンバーの「従来の ($\epsilon' = \mu' = 1$) 抵抗性インピーダンスの表式 $Z^{(con)}_{res}$」は、「従来の相対論的空間電荷インピーダンスの表式 $Z^{(con)}_{rel,sp}$」

$$Z^{(con)}_{rel,sp} = -\frac{j\omega\mathcal{L}}{4\pi\epsilon_0 c^2\beta^2\gamma^2} g_f, \tag{1}$$

を除くと、

$$Z^{(con)}_{res} = \mathcal{G}\mathcal{L}\frac{(1+j)}{\sigma_{2c}2\pi a\delta}, \tag{2}$$

と記述される [7]。但し、c は光速、β,γ はローレンツ因子、ω は角周波数、j は虚数単位、ϵ_0 は真空の誘電率、μ_0 は真空の透磁率、σ はビームの半径、$\delta = \sqrt{2/\mu'\mu_0\sigma_{2c}\omega}$、

$$\mathcal{G} = \tanh\left[(1+j)\frac{t}{\delta}\right], \tag{3}$$

は幾何学的因子で、チャンバーの厚み依存性 [3,7] を記し、

$$g_f = 1 + 2\log[\frac{a}{\sigma}], \tag{4}$$

は空間電荷効果由来の g-因子である [7]。

ここで、全インピーダンス ($Z^{(con)}_{rel,sp} + Z^{(con)}_{res}$) のチャンバーの厚み t 依存性をみる。抵抗性インピーダンス $Z^{(con)}_{res}$ は、スキンデプス δ がチャンバーの厚み t に比べて小さい場合、幾何学的因子 $\mathcal{G}$ は 1 と近似できるので、

$$Z^{(con)}_{res} = \mathcal{L}\frac{(1+j)}{\sigma_{2c}2\pi a\delta}, \tag{5}$$

* yoshihiro.shobuda@j-parc.jp

となり、AC 抵抗の形になるのに対し、δ が t に比べて大きい場合、

$$Z_{res}^{(con)} = j\omega\mu_0 \frac{1}{2\pi a}\mathcal{L}t, \tag{6}$$

で近似される。Equation (6) はビームに由来する磁束が抵抗壁を貫通することで生ずるインダクタンスを表している。このように抵抗性インピーダンスは無限小の t でゼロに近づく。

一方で、空間電荷のインピーダンス $Z_{rel,sp}^{(con)}$ は厚み t による変更を受けない。つまり、内径 a 依存性は残ることになる。この結果は明らかに非物理的なので、従来の表式には適応限界があることが分かる。

3． 新しいモデルの厳密解と特徴

ここで、内径 a、厚み t の抵抗性チャンバーの外側に真空層を介して意図的に内径 $d(> a+t)$ の完全導体のチャンバーを導入する。文献 [6] にならい、縦方向インピーダンスをビーム電流で規格化したビームの断面上の縦方向電場の平均値で定義すると、非相対論的な場合も扱える一般的な空間電荷インピーダンス $Z_{non,sp}(a)$ [5]:

$$\frac{Z_{non,sp}(a)}{\mathcal{L}} = -\frac{j2Z_0\left[\frac{1}{2} - I_1(\bar{k}\sigma)K_1(\bar{k}\sigma)\right]}{\bar{k}\beta\gamma\pi\sigma^2} + \frac{j2Z_0K_0(\bar{k}a)I_1^2(\bar{k}\sigma)}{\bar{k}\beta\gamma\pi\sigma^2 I_0(\bar{k}a)}, \tag{7}$$

を含む全縦方向インピーダンス Z_L^R の厳密解は

$$\frac{Z_L^R}{\mathcal{L}} = \frac{Z_{non,sp}(a)}{\mathcal{L}} + \frac{Z_{RW,rig}}{\mathcal{L}}, \tag{8}$$

で与えられる。但し、$I_n(z), K_n(z)$ は変形ベッセル関数、Z_0 は真空のインピーダンス、$k=\omega/c\beta$、$\bar{k}=k/\gamma$、

$$\frac{Z_{RW,rig}}{\mathcal{L}} = -\frac{j2Z_0K_0(\bar{k}a)I_1^2(\bar{k}\sigma)}{\bar{k}\pi\beta\gamma\sigma^2 I_0(\bar{k}a)} - \frac{2I_1^2\left(\bar{k}\sigma\right)jZ_0\mathcal{N}}{\bar{k}\sigma^2\beta\pi\gamma\mathcal{D}}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= Z_0(\sigma_{2c}+j\omega\epsilon'\epsilon_0)K_0(\bar{k}a)\Big\{\alpha^{(1)}I_1(\nu_2 a) - K_1(\nu_2 a) \\ &\quad - \frac{K_0\left(\bar{k}d\right)\left[\alpha^{(2)}I_1(\nu_2 a) - \alpha^{(3)}K_1(\nu_2 a)\right]}{I_0\left(\bar{k}d\right)}\Big\} \\ &\quad + j\beta\gamma\nu_2 K_1(\bar{k}a)\Big\{\alpha^{(1)}I_0(\nu_2 a) + K_0(\nu_2 a) \\ &\quad - \frac{K_0\left(\bar{k}d\right)\left[\alpha^{(2)}I_0(\nu_2 a) + \alpha^{(3)}K_0(\nu_2 a)\right]}{I_0\left(\bar{k}d\right)}\Big\},\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= -Z_0(\sigma_{2c}+j\omega\epsilon'\epsilon_0)I_0\left(\bar{k}a\right)\Big\{\alpha^{(1)}I_1(\nu_2 a) - K_1(\nu_2 a) \\ &\quad - \frac{K_0\left(\bar{k}d\right)\left[\alpha^{(2)}I_1(\nu_2 a) - \alpha^{(3)}K_1(\nu_2 a)\right]}{I_0\left(\bar{k}d\right)}\Big\} \\ &\quad + j\beta\gamma\nu_2 I_1\left(\bar{k}a\right)\Big\{\alpha^{(1)}I_0(\nu_2 a) + K_0(\nu_2 a) \\ &\quad - \frac{K_0\left(\bar{k}d\right)\left[\alpha^{(2)}I_0(\nu_2 a) + \alpha^{(3)}K_0(\nu_2 a)\right]}{I_0\left(\bar{k}d\right)}\Big\},\end{aligned} \tag{11}$$

$$\alpha^{(1)} = \frac{\left[K_1(\nu_2(a+t)) - \frac{j\beta\gamma\nu_2K_0(\nu_2(a+t))K_1\left(\bar{k}(a+t)\right)}{Z_0(\sigma_{2c}+j\omega\epsilon'\epsilon_0)K_0\left(\bar{k}(a+t)\right)}\right]}{\left[I_1(\nu_2(a+t)) + \frac{j\beta\gamma\nu_2I_0(\nu_2(a+t))K_1\left(\bar{k}(a+t)\right)}{Z_0(\sigma_{2c}+j\omega\epsilon'\epsilon_0)K_0\left(\bar{k}(a+t)\right)}\right]}, \tag{12}$$

$$\alpha^{(2)} = \frac{K_1(\nu_2(a+t))\,I_0\left(\bar{k}(a+t)\right)}{I_1(\nu_2(a+t))\,K_0\left(\bar{k}(a+t)\right)} \times \frac{\left[1 + \frac{j\beta\gamma\nu_2K_0(\nu_2(a+t))I_1\left(\bar{k}(a+t)\right)}{Z_0(\sigma_{2c}+j\omega\epsilon'\epsilon_0)K_1(\nu_2(a+t))I_0\left(\bar{k}(a+t)\right)}\right]}{\left[1 + \frac{j\beta\gamma\nu_2I_0(\nu_2(a+t))K_1\left(\bar{k}(a+t)\right)}{Z_0(\sigma_{2c}+j\omega\epsilon'\epsilon_0)I_1(\nu_2(a+t))K_0\left(\bar{k}(a+t)\right)}\right]}, \tag{13}$$

$$\alpha^{(3)} = \frac{\left[I_0\left(\bar{k}(a+t)\right) - \frac{j\beta\gamma\nu_2I_0(\nu_2(a+t))I_1\left(\bar{k}(a+t)\right)}{Z_0(\sigma_{2c}+j\omega\epsilon'\epsilon_0)I_1(\nu_2(a+t))}\right]}{\left[K_0\left(\bar{k}(a+t)\right) + \frac{j\beta\gamma\nu_2I_0(\nu_2(a+t))K_1\left(\bar{k}(a+t)\right)}{Z_0(\sigma_{2c}+j\omega\epsilon'\epsilon_0)I_1(\nu_2(a+t))}\right]}, \tag{14}$$

$\nu_2 = \sqrt{k^2(1-\beta^2\epsilon'\mu') + jk\beta\mu' Z_0\sigma_{2c}}$。

この式を出発点に、全縦方向インピーダンス Eq. (8) の性質を見てみる。まず、電気伝導率 σ_{2c} を無限大にすると $Z_{RW,rig}$ はゼロになるため、Eq. (8) は半径 a の完全導体チャンバーが作る空間電荷インピーダンス Eq. (7) を再現する。さらに、a を無限大にした時、Eq. (7) の第 2 項はゼロになるため、Eq. (7) の第 2 項は境界条件に由来する「間接的な空間電荷インピーダンス」を示し、第 1 項はビーム自身に由来する「直接的な空間電荷インピーダンス」を示すことが分かる。また、チャンバーの厚みを $t=0$ と置くと、Eq. (8) は

$$\frac{Z_L^R}{\mathcal{L}} = \frac{Z_{non,sp}(d)}{\mathcal{L}}, \tag{15}$$

となり、全インピーダンス Z_L^R は半径 d の完全導体チャンバーが作る空間電荷効果インピーダンスを再現することが分かる。

3.1 厚さ t 無限大のチャンバーの場合

次に、Eq. (9) でビーム半径を $\sigma=0$ と置き、内径 d と厚み t を無限大にすると、

$$\frac{Z_{RW,rig}}{\mathcal{L}} = \frac{Z_0\nu_2}{2\pi a I_0(a\bar{k})\left[\sigma_{2c}Z_0I_0(\bar{k}a) + j\beta\gamma\nu_2 I_1(\bar{k}a)\right]}, \tag{16}$$

と簡単化できる。Figure 1 に Eq. (16) で計算したインピーダンス $Z_{RW,rig}/\mathcal{L}$ の全体像を示した。左図は $\gamma=2$ の場合、右図は $\gamma=10000$ の場合の結果を示している。これから、ビームが相対論的である時、

$$f_R \simeq \frac{c}{\pi\left(\frac{\mu' a^2}{Z_0\sigma_c}\right)^{\frac{1}{3}}}, \tag{17}$$

にインピーダンスの実部がピーク (Figure 1 の右図の場合 $f_R \simeq 0.2$ THz) をつくることが分かる。

これは、Eq. (16) が相対論的なビームに対して

$$Z_{RW} \simeq \frac{1}{\left[\frac{\sigma_{2c}2\pi a}{\sqrt{j\omega\mu_0\mu'\sigma_{2c}\mathcal{L}}} + j\omega\frac{\epsilon_0\pi a^2}{\mathcal{L}}\right]}, \tag{18}$$

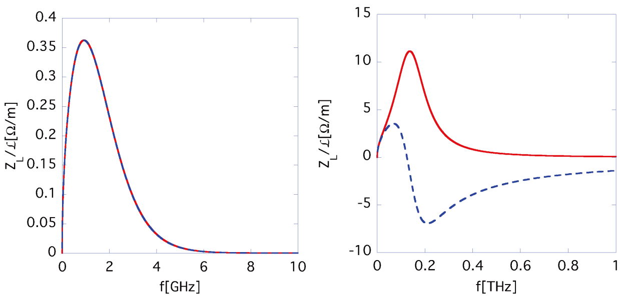

Figure 1: Overall behavior of the longitudinal impedances for $\gamma = 2$ (left) and $\gamma = 10000$ (right), where $a = 65$ mm, $\sigma_{2c} = 10^5$ S/m, and $\epsilon' = \mu' = 1$. The red solid and blue dashed lines denote the real and imaginary parts of impedances, respectively.

と近似できるためである [8]。第 1 項は抵抗性インピーダンスのアドミタンスを表し、第 2 項はチャンバーが実効静電容量をつくることを示している。

Figure 1 の左と右のパネルを比較すると、ビームが非相対論的 (左図) になるにつれてピーク周波数が低くなる。これは、低速のビームは高周波のウェイク場を通過する際、相互作用が実質的に抑制されるためである。

ここで、低周波部分に着目して $\bar{k}a \ll 1$ とすると、Eq. (16) は通常の電気伝導率 σ_{2c} の大きい金属チャンバーの場合、ビームが相対論的か非相対論的かによらず、次のように近似される。

$$\frac{Z_{L,non,RW}}{\mathcal{L}} \simeq \frac{(1+j)}{\sigma_{2c}2\pi a\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\mu'\sigma_{2c}}}} + \frac{\omega^2\mu'}{4c^2\pi\sigma_{2c}}. \tag{19}$$

このように第 1 項は従来の抵抗性インピーダンスを再現する。但し、この式にローレンツ因子依存性は現れない。それは、ビームの縦方向のウェイクは余弦関数的に振る舞うため、低周波では時間に依らずほぼ一定にみえるためである [5,7]。

3.2 有限の厚みのチャンバーの場合

3.2.1 相対論的ビームの場合の近似式

ここで、ビームが相対論的な場合、厚みを持つチェンバーの抵抗性インピーダンスが低周波側でどのように消失するか、また、空間電荷インピーダンスがどのようにその影響を受けるか見てみる。そこで、相対論的ビームに対して、

$$\frac{\omega}{c\beta\gamma}d \ll 1, \tag{20}$$

を仮定し、$\mathcal{L} = 2\pi R$ と置くことで、Eq. (8) を近似する。この場合、低周波側で Z_L^R は

$$Z_L^R = \frac{(1+j)R\tanh[(1+j)\frac{t}{\delta}]}{\sigma_{2c}a\delta} - \frac{j\omega RZ_0(a+t)\log[\frac{d}{(a+t)}]}{c\beta^2\gamma^2 a\cosh^2[(1+j)\frac{t}{\delta}]} - \frac{j\omega RZ_0}{2c\beta^2\gamma^2}g_f[a], \tag{21}$$

となる。但し、g-因子は

$$g_f[a] = \frac{1}{2} + 2\log[\frac{a}{\sigma}], \tag{22}$$

で与えられる。Equation (4) と比較すると、定数項 の 1 は 1/2 で置き換えられているが、それは、本稿では文献 [6] に従って、インピーダンスをビームの断面上の縦方向電場の平均で定義しているためである。

Equation (21) の最終項は「半径 a のチャンバーに対する空間電荷インピーダンス」を表し、第 1 項は「有限の厚さ t のチャンバーが引き起こす抵抗性インピーダンス」を再現している。それ以外に「チャンバーの内壁と外壁の間の空間を満たす場の効果」を表す第 2 項が自然に現れる。厚さ t が無限大になると第 2 項は消え、半径 a のチャンバーの抵抗性壁インピーダンスと空間電荷インピーダンスだけが残る。また、厚さ t がゼロの場合、抵抗性インピーダンスが消失し、第 2 項と第 3 項が組み合わさって、半径 d のチャンバーに対する空間電荷インピーダンスを再現する。

本レポートのモデルでも、チャンバーの厚み t を小さくすると、抵抗性インピーダンスの実部が直流抵抗を生じずに消失するが、合わせて壁電流が半径 d のチャンバー壁を流れ始める。実際、Eq. (21) は

$$Z_L^R \simeq \left[\frac{1}{\frac{(1+j)R}{\sigma_{2c}a\delta\tanh[(1+j)\frac{t}{\delta}]} + \frac{j\omega RZ_0}{c\beta^2\gamma^2}\log[\frac{d}{a}]} + \frac{1}{R_D}\right]^{-1} - \frac{j\omega RZ_0}{2c\beta^2\gamma^2}(\frac{1}{2} + 2\log[\frac{d}{\sigma}]), \tag{23}$$

と並列回路的に書きかえられる。ここで、

$$R_D = \frac{(1+j)R\sinh[2(1+j)\frac{t}{\delta}]}{\sigma_{2c}2a\delta}, \tag{24}$$

は「完全導体と抵抗性チャンバー間の空間のインピーダンス」を示しており、チャンバーの厚み t が零になると零になり、無限大の厚みで発散する。「抵抗性インピーダンス」は Eq. (23) の第 1 項の分母に現れ、「抵抗性の内壁と完全導体の外壁が作る間接的な空間電荷インピーダンスの差」が第 2 項に現れる。最後の項は「半径 d のチャンバーとビームが作る空間電荷インピーダンス」である。

このように、Eq. (23) の第 1 項の分母は無限小の t で直流抵抗を生ずるが、R_D の効果で Z_L^R には、直流抵抗の効果は有意に効かない。このようにビームのインピーダンスは、系全体としては、ビームのエネルギー損失を最小化するように決まることが分かる。

ここで、従来の相対論的空間電荷インピーダンスの表式に目を向けると別の問題が生じるようにみえる。それは、空間電荷インピーダンスが、

$$Z_L^R = -\frac{j\omega RZ_0}{2c\beta^2\gamma^2}\left(\frac{1}{2} + 2\log[\frac{d}{\sigma}]\right), \tag{25}$$

で表されるとすると、半径 d を無限大にした時、空間電荷インピーダンスも無限大になるからである。物

理的には、この時の空間電荷インピーダンスはビーム由来の「直接的な空間電荷インピーダンス」のみになるはずである。しかし、この矛盾は厳密式 Eq. (8) から近似式 Eq. (21) を導く際、Eq. (20) を用いたということを認識することで解決する。つまり、無限大の d は、Eq. (20) の適応条件外になるからである。

3.2.2 非相対論的なビームに対する近似式

ここで、非相対論的なビームに対して同様の操作を行う。この場合、Eq. (20) の条件の元、Eq. (8) は

$$\frac{Z_L^R}{\mathcal{L}} \simeq -\frac{jkZ_0(\frac{1}{2}+2\log[\frac{a}{\sigma}])}{4\pi\beta\gamma^2} + \frac{\nu_2(j\beta\gamma^2\nu_2\tanh(\nu_2 t)+k(a+t)Z_0\sigma_{2c}\log[\frac{d}{(a+t)}])}{2a\pi\sigma_{2c}(j\beta\gamma^2\nu_2+k(a+t)Z_0\sigma_{2c}\log[\frac{d}{(a+t)}]\tanh(\nu_2 t))}, \quad (26)$$

と近似される。ここで、第 1 項は「半径 a のチャンバーの空間電荷インピーダンス」を示し、Eq. (26) で t を零におくと半径 d のチャンバーの空間電荷インピーダンスが再現される。さらに、$\gamma \gg 1$ の相対論的なビームでは、Eq. (26) は Eq. (21) を再現する。一方、非相対論的なビームの場合には、周波数領域が

$$\frac{\frac{c\beta^2\gamma^2}{\sqrt{(a+t)Z_0^2\log[\frac{d}{(a+t)}](-t\beta^2\gamma^2\mu'+(a+t)\log[\frac{d}{(a+t)}])}}}{2\pi t\sigma_{2c}} < f < \frac{c}{\pi t^2 Z_0\mu'\sigma_{2c}}, \quad (27)$$

の時に、Eq. (26) は

$$\frac{Z_L^R}{\mathcal{L}} \simeq -\frac{jkZ_0(\frac{1}{2}+2\log[\frac{a}{\sigma}])}{4\pi\beta\gamma^2} + \frac{\nu_2}{2a\pi\sigma_{2c}\tanh(\nu_2 t)}, \quad (28)$$

と近似でき、Eq. (28) の第 2 項を見ると t が小さい時 DC 抵抗が有意な働きをすることが分かる。

この特性を調べるために, Eq. (26) を並列回路モデルで書き直す。$t \ll a$ の場合、Eq. (26) は次のように近似される。

$$\frac{Z_L^R}{\mathcal{L}} \simeq -\frac{j\omega Z_0(\frac{1}{2}+2\log[\frac{d}{\sigma}])}{4\pi c\beta^2\gamma^2} + [\frac{1}{\left(\frac{(1+j)}{2\pi a\sigma_{2c}\delta\tanh[(1+j)\frac{t}{\delta}]}+\frac{j\omega Z_0\log[\frac{d}{a}]}{2\pi c\beta^2\gamma^2}\right)}+\frac{1}{Z_2}]^{-1}. \quad (29)$$

ここで、Eq. (24) で R_D と表されていた抵抗性内壁と完全導体の外壁の間の真空のインピーダンスは、ローレンツ γ 依存性をもつ

$$Z_2 = \left[\frac{(1+j)}{4\pi a\sigma_{2c}\delta} + \frac{j\omega Z_0\tanh(\frac{(1+j)t}{\delta})\log[\frac{d}{a}]}{4\pi c\beta^2\gamma^2}\right] \times \left[1+\frac{j\omega a(a+t)Z_0\sigma_{2c}\log[\frac{d}{(a+t)}]\log[\frac{a}{d}]}{c\beta^4\gamma^4\mu'}\right] \times \sinh[\frac{2(1+j)t}{\delta}], \quad (30)$$

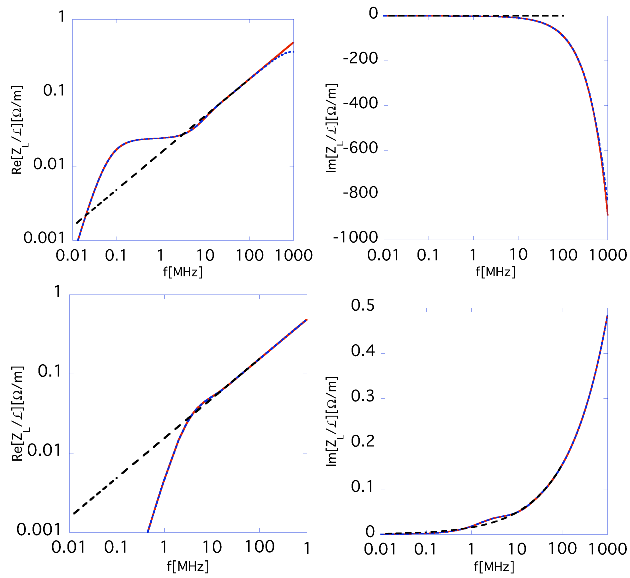

Figure 2: Longitudinal impedances for $\gamma = 2$ (upper) and $\gamma = 1000$ (lower), including the space charge impedance, where $\sigma = 10$ mm, $\sigma_{2c} = 10^5$ S/m, $a = 65$ mm, $d = 165$ mm, $t = 1$ mm, and $\epsilon' = \mu' = 1$. The blue dashed and red solid lines (almost overlapped) denote the impedances by Eq. (8), and (29), respectively. The black dashed lines denote Eq. (5), for reference.

に一般化される。Equation (30) の第 2 括弧の第 2 項をみると分かるように、非相対論的なビームの時、Z_2 は導電率 σ_{2c} が高いため大きくなり、壁電流が半径 d の外壁を流れにくくなる。以上のようにして、非相対論的なビームの場合、DC 抵抗が縦方向インピーダンスに有意な働きをすることがわかる。確認のため、Fig. 2 に相対論的な場合 (下図) と非相対論的的なビームの場合 (上図) のインピーダンスの実部 (左図) と虚部 (右図) の具体例を示した。

3.3 従来の描像との関係

最後に、文献 [6] に記されている描像との比較を行う。文献 [6] では内径 d は無限大となっているので、Eq. (8) に $d = \infty$ を代入すると、相対論的なビームの場合で低周波側の Z_L^R は

$$Z_L^R = kRZ_0\left[-\frac{jg_f[a]}{2\beta\gamma^2} + j\mu'\beta\left(\frac{t(1+\frac{(1+\Gamma+\log[\frac{ak}{2\gamma}])}{\mu'\beta^2\gamma^2})}{a}+\frac{(\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}])}{\mu'\beta^2\gamma^2}\right) + 2a\beta\mu' t(\sqrt{\frac{\omega\mu'\mu_0\sigma_{2c}}{2}})^2(\frac{\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}]}{\mu'\beta^2\gamma^2})^2\right], \quad (31)$$

と近似できる (この式は文献 [6] の Eq. (6.113) に対応し、(6.113) の誤植は修正した。)。ここで、Γ は オイラー定数である。

文献 [6] の Eq. (6.114) を導出するには、

$$1 \gg \frac{1+\Gamma+\log[\frac{ak}{2\gamma}]}{\mu'\beta^2\gamma^2}, \tag{32}$$

を仮定する必要がある。すると、Eq. (31) は

$$Z_L^R = -\frac{jkRZ_0 g_f[a]}{2\beta\gamma^2} + \frac{1}{\frac{1}{\mathcal{R}_e}+\frac{1}{\mathcal{I}_e}}, \tag{33}$$

と書き換えられる。但し、

$$\mathcal{R}_e = \frac{kRZ_0\mu'\beta(\frac{t}{a}+\frac{(\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}])}{\mu'\beta^2\gamma^2})^2}{2at(\sqrt{\frac{\omega\mu'\mu_0\sigma_{2c}}{2}})^2(\frac{\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}]}{\mu'\beta^2\gamma^2})^2} \times\left[1+\frac{4a^2t^2(\sqrt{\frac{\omega\mu'\mu_0\sigma_{2c}}{2}})^4(\frac{\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}]}{\mu'\beta^2\gamma^2})^4}{(\frac{t}{a}+\frac{(\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}])}{\mu'\beta^2\gamma^2})^2}\right], \tag{34}$$

$$\mathcal{I}_e = j\frac{kRZ_0\mu'\beta(\frac{t}{a}+\frac{(\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}])}{\mu'\beta^2\gamma^2})^2}{(\frac{t}{a}+\frac{(\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}])}{\mu'\beta^2\gamma^2})} \times\left[1+\frac{4a^2t^2(\sqrt{\frac{\omega\mu'\mu_0\sigma_{2c}}{2}})^4(\frac{\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}]}{\mu'\beta^2\gamma^2})^4}{(\frac{t}{a}+\frac{(\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}])}{\mu'\beta^2\gamma^2})^2}\right], \tag{35}$$

となる。そこで、さらに、

$$\frac{t}{a} \ll \frac{(\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}])}{\mu'\beta^2\gamma^2}, \tag{36}$$

$$(\sqrt{\frac{\omega\mu'\mu_0\sigma_{2c}}{2}})^4(\frac{\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}]}{\mu'\beta^2\gamma^2})^4 \ll \frac{(\frac{t}{a}+\frac{(\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}])}{\mu'\beta^2\gamma^2})^2}{4a^2t^2}, \tag{37}$$

という条件が満足されると、Eq. (34) と (35) は、

$$\mathcal{R}_e \simeq \frac{R\left[1+2\frac{t}{a(\frac{\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}]}{\mu'\beta^2\gamma^2})}\right]}{at\sigma_{2c}}, \tag{38}$$

$$\mathcal{I}_e \simeq j\omega R\mu_0\frac{(\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}])}{\beta^2\gamma^2}\left[1+\frac{t}{a(\frac{\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}]}{\mu'\beta^2\gamma^2})}\right], \tag{39}$$

と近似される。(但し、ここでも文献 [6] の Eq. (6.115) の誤植を修正した。) これを見ると分かるように、$\mathcal{R}_e$ は DC 抵抗を示している。しかし、この並列回路で DC 抵抗が有意な働きをするためには、

$$\mathcal{R}_e \ll \mathcal{I}_e, \tag{40}$$

である必要があり、それは

$$\frac{1}{\sigma_{2c}at} \ll \omega\mu_0\frac{(\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}])}{\beta^2\gamma^2}, \tag{41}$$

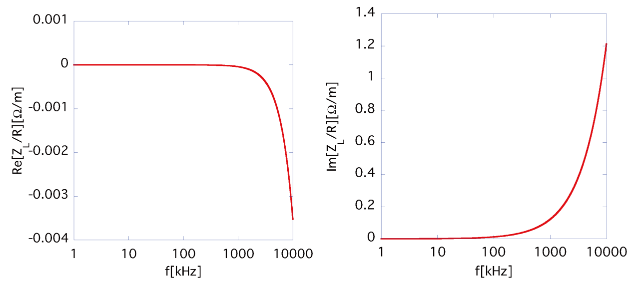

Figure 3: Longitudinal impedance calculated by Eq. (33) with Eqs. (38) and (39), where $\gamma = 1000$ $\sigma = 10$ mm, $\sigma_{2c} = 10^5$ S/m, $a = 65$ mm, $t = 1$ mm, and $\epsilon' = \mu' = 1$.

となる。一方で、Eq. (36) を使うと Eq. (37) は

$$\sigma_{2c}at\omega\mu_0\frac{(\Gamma+\log[\frac{ka}{2\gamma}])}{\beta^2\gamma^2} \ll 1, \tag{42}$$

と簡単化され、Eq. (41) と矛盾する。このようにして、並列回路で書き換えても DC 抵抗が有意になることはないことが確認できる。また、Fig. 3 のように Eq. (33) の実部は負となり非物理的な結果を示す。

4 . まとめ

抵抗性チャンバーの外側に真空層を介して意図的に完全導体のチャンバーを導入することで、抵抗性縦方向インピーダンスの新しい物理描像を示した。同様の議論は、横方向に関しても可能である [9]。

謝辞

本研究は、一部 JSPS KAKENHI Grant No. JP17K05124 の援助で行われました。

参考文献

[1] Y. Shobuda, Y. H. Chin and K. Takata, *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, vol. 17, 091001, 2014; `DOI:https://doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.17.091001`
[2] Y. Shobuda and T. Toyama, *Phys. Rev. Accel. Beams*, vol. 23, 092801, 2020; `DOI:https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.23.092801`
[3] Y. Shobuda and K.Yokoya, *Phys. Rev.* **E 66**, 056501, 2002; `DOI:https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056501`
[4] Y. Shobuda, Y. H. Chin and K. Takata, *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, vol. 12, 094401, 2009; `DOI:https://doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.12.094401`
[5] Y. Shobuda, Y. H. Chin and K. Takata, *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, vol. 10, 044403, 2007; `DOI:https://doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.10.044403`
[6] B. W. Zotter and S. A. Kheifets, *Impedances and wakes in high-energy particle accelerators*, World Scientific, 1998.
[7] A. W. Chao, *Physics of collective beam instabilities in high energy accelerators*, New York, Wiley, 1993.
[8] Y. Shobuda, *Prog. Theor. Exp. Phys.*, vol. 2018, 123G01 (2018); `https://doi.org/10.1093/ptep/pty124`
[9] Y. Shobuda, *Prog. Theor. Exp. Phys.*, vol. 2022, 053G01 (2022); `https://doi.org/10.1093/ptep/ptac053`