

共振器 FEL における超放射発振の非平均コードによるシミュレーション SIMULATIONS OF SUPERRADIANCE IN FEL OSCILLATORS BY UNAVERAGED CODES

羽島良一^{#, A)}

Ryoichi Hajima ^{#, A)}

^{A)} QST, Kizugawa, Kyoto

Abstract

In free-electron laser oscillators, when the electron bunch length, slip length, gain, optical cavity loss and detuning length satisfy certain conditions, an ultrashort pulse containing only a few periods of the electric field of light is generated. Such lasing is called superradiance FEL. Generally, FEL simulation codes calculate the growth of the FEL pulse by fixing macroparticles representing electrons in a specific bunch slice and averaging many macroparticles over at least one radiation wavelength. In superradiance FELs, the energy of electrons varies greatly in the undulator, so unaveraged simulation, in which macroparticles are not fixed to a bunch slice, is required. In this paper, we report the results of calculations of superradiance FEL oscillators using an unaveraged simulation code.

1. はじめに

共振器型自由電子レーザー (Free-Electron Laser; FEL) において、スリップ長、バンチ長、ゲインパラメータ、共振器損失が一定の条件を満たすときに、超短光パルスが高効率で生成される[1]。このような発振は、超放射 FEL と呼ばれる。超放射 FEL 発振のうち、特に、光パルスが共振器を往復する時間が電子バンチ間隔に等しい場合、すなわち、完全同期長発振では、光の電場周期を数サイクルしか含まない超短パルスが実現する。赤外の波長領域で動作する共振器型 FEL の超放射発振では、集光した FEL パルスの強度が、原子や分子にトンネル電離を生じる強度 (およそ 10^{13} W/cm²) を超えることも可能となる。われわれは、超放射領域で動作する共振器型 FEL で発生する数サイクルパルスを利用した中赤外、長波長赤外領域の強光子場科学の開拓を目指した研究を進めている[2, 3]。

高効率かつ超短パルスが得られる超放射 FEL は、発振に寄与する電子数 (N) の二乗でピーク強度が増大し、 $1/N$ に比例してパルス幅が短くなる点において、R. Dicke が存在を予言し、その後実験で確認された二準位系の超放射[4]と同様である。超放射 FEL の研究は、二準位系の超放射とのアナロジーを通して、光と物質、光と電子の共鳴的相互作用を深く知ることもつながる。

超放射 FEL の実験計画、データ解析、また、発振メカニズムの理解には、数値解析 (FEL 発振シミュレーション) の力を借りることが不可欠である。ところが、超放射 FEL のシミュレーションでは、FEL シミュレーションで広く用いられている計算コードでは正しい結果が得られず、非平均コードが必要であることがわかっている。本稿では、非平均コードを用いた超放射 FEL シミュレーションについて報告する。

2. 平均コードと非平均コード

アンジュレータ中を進行する電子と光が共鳴的相互作用を行うことによって、電子から光へエネルギーが受け渡されることが、FEL における光増幅の原理である。この時、電子はアンジュレータ磁場と光の電場が作るポテンシャルにトラップされ、光の波長に等しい周期でエネルギー変調が生じ、やがて、密度変調となる。

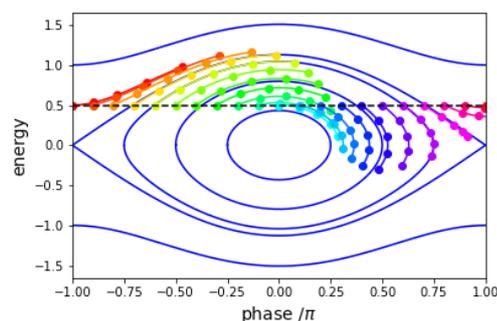


Figure 1: Motion of macroparticles in the ponderomotive potential formed by the radiation and undulator fields. The initial energy of the macroparticles is set to be slightly larger than the resonant energy.

通常の FEL シミュレーションでは、個々の電子の運動を追跡するのではなく、少数のマクロ粒子によって多数の電子の運動を代表する[5]。Figure 1 は、ポテンシャル中でのマクロ粒子の運動を図示したものである。エネルギー変調を受けたマクロ粒子がポテンシャル中を回転し、密度変調を生じる様子が示されている。密度変調のうち、ポテンシャルと位相が 90 度ずれた成分が電場振幅の変化を、ポテンシャルと同位相成分が電場位相の変化をもたらす。それぞれの成分は、マクロ粒子分布を離散フーリエ変換することで求められる。すなわち、ポテンシャルに対するマクロ粒子の位相を ψ とすれば、電場振幅の変

[#] hajima.ryoichi@qst.go.jp

化は $\sin \psi$ の値を、電場位相の変化は $\cos \psi$ の値を多数のマクロ粒子について平均することで計算できる。フーリエ変換はポテンシャルの幅(光の波長)よりも広い区間で行わなければならないので、マクロ粒子の位相を平均する操作も光の波長より広い範囲で行うことになる。このような FEL シミュレーションコードは、平均コード(averaged code)と呼ばれる。具体的な計算手順は以下の通りである。

- (1) 電子バンチを時間軸に沿って多数のスライスに分割する。
- (2) それぞれのバンチスライスに多数のマクロ粒子を配置し、アンジュレタ磁場、光の電場が作るポテンシャル中での運動を追跡する。
- (3) スライスに含まれるマクロ粒子の位相を平均することで、スライスの位置における電場の振幅と位相の変化を求める。

ところで、共振型 FEL における超放射発振では、10%近い変換効率が得られ、FEL 発振後の電子エネルギーの減少は最大で 16%に達することが観測されている[6]。エネルギーを大きく失った電子はアンジュレタ中で、バンチ後方に大きくスリップする。このような場合、マクロ粒子がバンチスライスに固定されているという前提は成り立たず、平均コードでは正しいシミュレーション結果が得られない。

B.W.J. McNeil らは、マクロ粒子位相の平均化操作を伴わない FEL シミュレーション手法を提案した[7]。この手法に基づく FEL シミュレーションコードは、非平均コード(unaveraged code)と呼ばれる。非平均コードでは、個々のマクロ粒子が次のタイムステップでつくる放射(光)の電場を求め、すべてのマクロ粒子が作る電場を重ね合わせることでレーザー場の時間発展を計算する。マクロ粒子はバンチスライスに固定されず、バンチ内を自由に動くことができる。

FEL シミュレーションにおける「非平均」の概念は、その後、さらに拡張され、アンジュレタ磁場の早い振動を平均化しない、光のエンベロップ近似(slowly varying envelope approximation)を用いない非平均コードが開発されている[8]。

本稿では、著者が開発した 1 次元の FEL シミュレーションコードを用いた計算結果を紹介する。本コードは、McNeil が提案した計算技法に従う非平均コードであるが、アンジュレタ磁場の平均化、エンベロップ近似は残っている。

3. 二準位系における超放射と量子揺らぎ

二準位系の超放射と超放射 FEL のアナロジーについては、2021 年の加速器学会年會にて発表した[9]。二準位系の超放射における量子揺らぎの役割と、超放射 FEL におけるショットノイズの役割を比較するため、ここでは、ブロッホ球を用いた超放射(超蛍光ともいう)の計算結果を再掲する。

ブロッホ球は、二つの直交する量子状態、および、その重ね合わせ状態を幾何学的に表現するためのものである。電子スピンの表現(核磁気共鳴の原理の説明)、光子の偏光状態の表現、量子コンピュータや量子情報分野における量子ビットの重ね合わせ状態の表現な

どに用いられるが、ここでは、二準位系の上準位と下準位の量子状態を表すためにブロッホ球を用いる。

ブロッホ球の北極点を上準位の純粋な状態、南極点を下準位の純粋な状態と定義すると、ブロッホ球表面の任意の位置(ブロッホベクトル)は、上準位と下準位の重ね合わせ状態となる。緯度はそれぞれの準位の割合(波動関数の振幅)、経度は二つの準位の位相差に対応する。

多数の粒子からなる二準位系において、初期状態としてすべての粒子が上準位にある場合、もし、量子揺らぎがなければ、倒立した振り子が姿勢を維持するように、すべての粒子が上準位に存在し続け、系からの放射は起こらない。実際には、自発放射や背景の熱放射に由来する量子揺らぎがあるために、上準位の粒子は下準位に遷移し、この時の放射波形は主パルスに続くリングングを示す[10, 11, 12]。

光と物質の共鳴的相互作用を明らかにした Burnham と Chiao による論文[10]に従って、二準位系からの超放射の時間波形を計算した結果を Fig. 2 に示す。ここでは、量子揺らぎを模擬するために、ブロッホベクトルの初期値をブロッホ球の北極点からわずかにずれた角度 θ_i に置いた(θ_i は initial tipping angle と呼ばれる量である)。 $\theta_i = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ の三通りの計算結果を示したが、初期値の違いによって、超放射パルスの時間発展が異なり、 θ_i が大きくなるほどパルスが早い時間で立ち上がることがわかる。

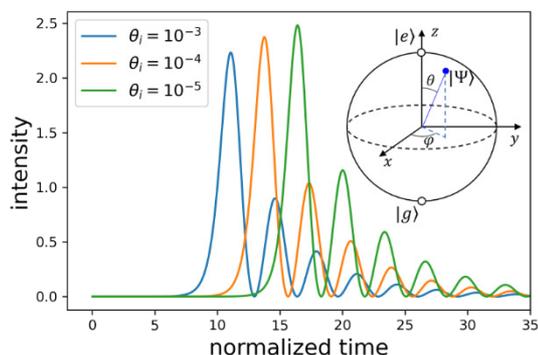


Figure 2: Superradiance of a two-level system calculated by the Burhan-Chiao model with different initial tipping angles, $\theta_i = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$. A Bloch vector representation of the two-level system is also depicted.

4. 非平均コードによる超放射 FEL シミュレーション

著者らは、過去の論文にて、完全同期長発振において、電子ビームの微小なショットノイズ(自発放射光)が FEL 発振の立ち上がりだけでなく、飽和後の発振の継続にも不可欠な役割を果たしていることを示した[13]。本稿では、あらためて、ショットノイズが超放射 FEL 発振に及ぼす影響を見るため、平均コードおよび非平均コードを用いた FEL シミュレーション結果を報告する。シミュレーションの条件を Table 1 に示した。平均コードでは矩形バンチとし、非平均コードでは、電子バンチ波形を矩形、パ

ラボリック、Gaussian と 3 通りに選び、電荷量が同じになるようにバンチ幅とピーク電流(ゲインパラメータ)を調整した。共振器は完全同期長とした。

Table 1: Simulation Parameters

Number of the undulator period	52
Normalized slippage distance	1
Cavity round trip loss	0.03
Rectangular bunch	
Normalized bunch length	0.5
FEL parameter at peak	4.15×10^{-3}
Parabolic Bunch	
Normalized full bunch length	0.5
FEL parameter at peak	4.76×10^{-3}
Gaussian Bunch	
Normalized RMS bunch length	0.0625
FEL parameter at peak	6.11×10^{-3}

まず、超放射 FEL 発振ではショットノイズが飽和後の FEL 発振の持続に必要であることを確認しておく。Figure 3 は、平均コードのシミュレーションにおいて、飽和後(600 パス目以降)にショットノイズをゼロとした時のマクロパルスを示す。ショットノイズ(自発放射光)が FEL の種光として発振の立ち上がりに不可欠であることは広く知られているが、飽和後の発振の持続においてもショットノイズが不可欠であるのが、完全同期長の超放射 FEL の特徴である。

平均コード、非平均コードで計算したマクロパルスの立ち上がりを Fig. 4 に示す。非平均コードでは、電子バンチの形状によってマクロパルスの立ち上がりと飽和レベルが異なる結果を示している。立ち上がりのタイミングの違いは、バンチ形状ごとのコヒーレント放射の大きさの違いで説明できる。すなわち、時間波形に鋭いエッジを持つ矩形バンチは FEL 波長において大きなコヒーレント放射成分を有するので、いわゆる「コヒーレント・スタート

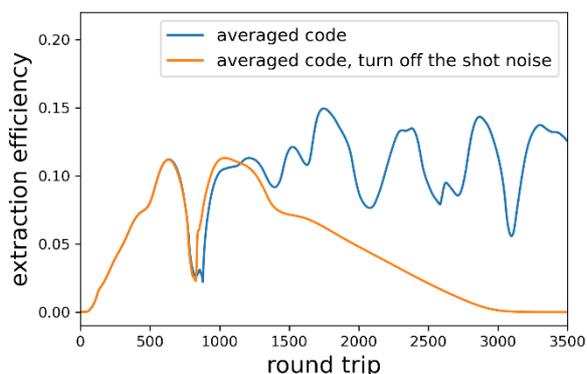


Figure 3: Evolution of macropulses at the perfectly synchronized FEL oscillator calculated by the averaged code. A simulation with turning off the shot noise after the 600-th round trip (orange line).

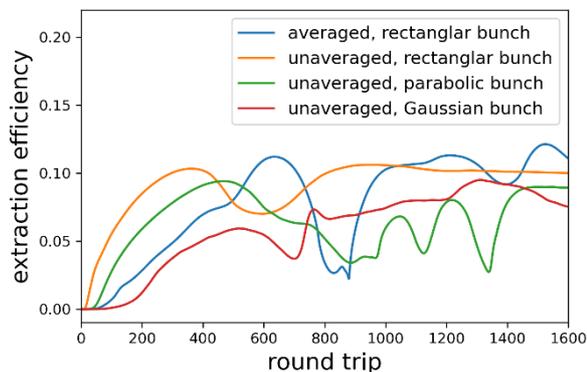


Figure 4: Evolution of macropulses at the perfectly synchronized FEL oscillator calculated by the averaged and unaveraged codes. Three different bunch shapes were assumed for the unaveraged code.

アップ」[7]の効果ゆえに早い立ち上がりを示している。なお、平均コード、非平均コードとも、インコヒーレント自発放射によるショットノイズの効果は Penman-McNeil の方法[14]で導入している。

次に、それぞれの場合について、1600 パス目の光パルス波形を Fig. 5 に示す。図中の黄色と緑の塗りつぶしパターンは、電子バンチのアンジュレータ入口、出口での位置を表している。FEL パルスは急峻な立ち上がりエッジをもつ主パルス、これに続くリングングという、超放射発振に特徴的な波形を示している。しかしながら、主ピーク的位置、リングングの構造に違いがある。

共振器型 FEL の超放射発振では、光パルスの先頭部はショットノイズで支配されている。アンジュレータを通過する電子バンチは光パルス中を後方へスリップしながら光との相互作用を行い、エネルギー変調、密度変調を生じ、光にエネルギーを受け渡す。コヒーレント放射の効果で実効的なショットノイズが大きくなれば、エネルギー

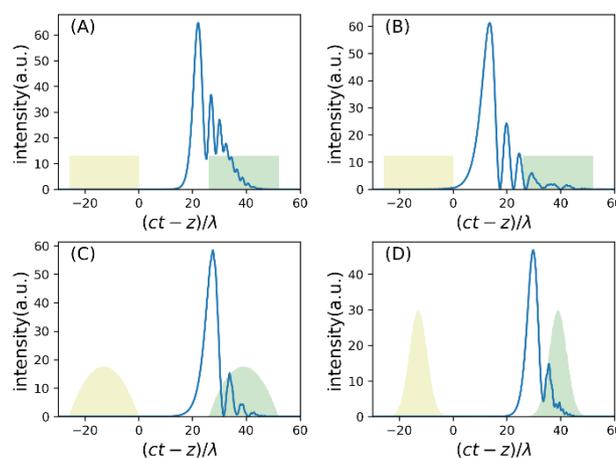


Figure 5: FEL pulses at the 1600-th round trip. (A) averaged code, (B) unaveraged code with a rectangular bunch (C) unaveraged code with a parabolic bunch, (D) unaveraged code with a Gaussian bunch. The yellow- and green-filled patterns represent electron bunches at the entrance and the exit of the undulator.

変調、密度変調が早く形成されるために、主ピークの位置は前方にずれる。これは、Fig. 2 の二準位系の超放射パルスにおいて、 θ_i が大きくなると主ピークが前方にずれることと対応している。すなわち、超放射 FEL におけるショットノイズは、二準位系超放射の initial tipping angle (自発放射、背景放射による量子ゆらぎ)と同じ役割を果たしている。自発放射がなければ FEL 発振が維持できない点も、量子揺らぎがなければ二準位系の超放射が起らない点と同様である。

超放射 FEL パルスのリングングは、スリップ領域に現れ、ゲインパラメータなどで決まる周期をもつ[15]。ショットノイズが小さい場合、主ピークがスリップ領域の後方に形成されるので、リングング中のサブパルスの数は少なくなることが Fig. 2 から読み取れる。

共振器型 FEL の超放射発振では高い変換効率が得られる。非平均コードによるパラボリックバンチの計算 (Fig. 4) では、1600 パス目の変換効率は 8.9% である。この時の、アンジュレータ通過後のマクロ粒子の位相空間分布を Fig. 6 に示す。光の波長に等しい周期でエネルギー変調が生じているが、マクロ粒子のエネルギー分布は大きく広がり、最大で 18% のエネルギー減少を示している。エネルギーを大きく失ったマクロ粒子は波長間隔のマクロバンチをまたいで大きく後方へスリップし、バンチが伸びている様子が見える。共振器型 FEL の超放射発振では、マクロ粒子がバンチスライスに固定されるという、平均コードの前提が成り立たないことが、あらためて確認できる。

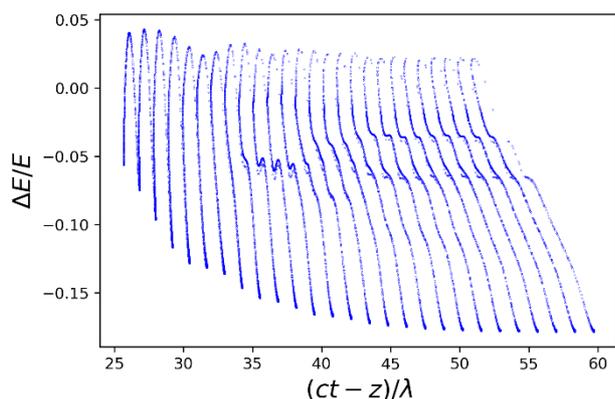


Figure 6: Macroparticles in the phase space after the undulator at the 1600-th round trip (unaveraged code with a parabolic bunch).

5. まとめ

共振器型 FEL における超放射発振について、平均コード、非平均コードによる FEL 発振シミュレーションの結果を示した。高い変換効率を示す超放射発振では、バンチスライスに固定されたマクロ粒子を前提とする平均コードではなく、マクロ粒子がバンチ内を自由に動くことができる非平均コードを使った計算が必要である。非平均コードでは、電子バンチの時間波形に応じたコヒーレント放射の効果が自動的に組み込まれる。その結果、矩形バンチではコヒーレント放射による実効的なショットノイズの増大が起り、マクロパルスの早い立ち上がり、ミ

クロパルスにおける主ピークの前方向への移動が見られる。二準位系の超放射における量子揺らぎ (initial tipping angle) と超放射 FEL における自発放射光のアナロジーについても再確認した。

謝辞

本研究は、文部科学省の光・量子飛躍フラッグシッププログラム (Q-LEAP、JPMXS0118070271)、科研費 (22H03881) の助成を受けたものである。Q-LEAP プログラムは、QST の永井良治、川瀬啓悟、森道昭、京都大学の大垣英明、全炳俊、日本大学の早川恭史、境武志、住友洋介、KEK の宮島司、島田美帆の各氏と共同で進めている。共同研究者の皆様に感謝申し上げます。

参考文献

- [1] R. Hajima, *Atoms* **9**, 15 (2021); <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.5147>
- [2] 羽島良一, *放射光*, **34**, 191 (2021); <http://www.jsrr.jp/journal/pdf/34/p191.pdf>
- [3] R. Hajima, H. Zen, H. Ohgaki, in these Proceedings.
- [4] R.H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954); <https://doi.org/10.1103/PhysRev.93.99>
- [5] C.A. Brau, “Free-Electron Lasers”, Academic Press, Inc. (1990).
- [6] H. Zen, H. Ohgaki, R. Hajima, *Appl. Phys. Express* **13**, 102007 (2020); <https://doi.org/10.35848/1882-0786/abb690>
- [7] B.W.J. McNeil, G.R.M. Robb, D.A. Jaroszynski, *Opt. Comm.* **165**, 65 (1999); [https://doi.org/10.1016/S0030-4018\(99\)00222-9](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(99)00222-9)
- [8] L.T. Campbell and B.W.J. McNeil, *Phys. Plasma* **19**, 093119 (2012); <https://doi.org/10.1063/1.4752743>
- [9] R. Hajima, *Proc. the 18th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan*, 748 (2021); https://www.pasj.jp/web_publish/pasj2021/proceedings/PDF/WEP0/WEP049.pdf
- [10] D.C. Burnham and R.Y. Chiao, *Phys. Rev.* **188**, 667 (1969); <https://doi.org/10.1103/PhysRev.188.667>
- [11] D.J. Heinzen, J.E. Thomas, M.S. Feld, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 677 (1985).
- [12] K. Cong et al., *J. Opt. Soc. America B* **33**, C80 (2016); <https://doi.org/10.1364/JOSAB.33.000C80>
- [13] R. Hajima, N. Nishimori, R. Nagai, E.J. Minehara, *Nucl. Instrum. Meth. A* **475**, 270 (2001); [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(01\)01621-7](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(01)01621-7)
- [14] C. Penman, B.W.J. McNeil, *Opt. Comm.* **90**, 82 (1992); [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(92\)90333-M](https://doi.org/10.1016/0030-4018(92)90333-M)
- [15] N. Piovella, *Phys. Rev. E* **51**, 5147 (1995); <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.5147>