

# アンジュレータ位相誤差の普遍的表式と系統的な不整磁場への適用 UNIVERSAL REPRESENTATION OF UNDULATOR PHASE ERRORS AND ITS APPLICATION TO SYSTEMATIC FIELD ERRORS

田中 隆次

Takashi Tanaka\*

RIKEN SPring-8 Center

## Abstract

The phase error is an important parameter to represent the quality of an undulator, and can be evaluated without complicated numerical processes. Because the harmonic intensity of undulator radiation is precisely and easily evaluated by the phase error, it has been used as a standard criterion to be imposed on the undulator quality. It is well known that this criterion becomes more stringent for higher harmonic orders. For example, the phase error should be less than  $18^\circ$  to suppress the intensity reduction for the fundamental radiation less than 10%, while that for the 15th harmonic is  $1.2^\circ$ . Recently, it was pointed out by several authors that such a stringent criterion is greatly relaxed under practical conditions in which the finite emittance and energy spread of the electron beam are not negligible. In other words, the conventional phase error overestimates the effects due to the undulator phase errors under the practical conditions. To overcome the above difficulty, we derived a universal representation of undulator phase errors that is available even under the practical conditions, and verified its validity under a variety of conditions. Using the derived representation, we also investigated the effects due to systematic errors that can potentially lead to a large phase error, and found that the above criterion (10% reduction at the 15th), under the influence of the energy spread of 0.1%, is around  $6^\circ$ . This result suggests the need to reconsider the undulator specification, which tends to be more stringent for higher harmonics.

## 1. はじめに

アンジュレータが生成する磁場は完全な正弦波ではなく、各種の要因で発生する誤差磁場（不整磁場）が含まれていることが知られている。このような不整磁場の影響は、光強度の低下やギャップ開閉に伴う軌道変動を引き起こすため、加速器へ設置する前に評価しておく必要がある。特に、放射光ユーザーにとって重要な光強度への影響を評価するには、(1) ホール素子などの磁場センサをアンジュレータ軸 ( $z$ ) 方向に沿って掃引することで磁場分布を計測し、(2) その結果を用いて数値計算によりアンジュレータ放射光のスペクトルを求める、という過程が必要である。これにより高次光の相対強度  $\hat{I} \equiv I_r/I_0$  ( $I_r$ 、 $I_0$  はそれぞれ実測磁場、理想磁場を用いて計算した光強度) が得られるので、これをアンジュレータの磁場品質として定義することが可能である。

さて、磁場計測及び数値計算の結果得られた高次光相対強度が許容値を下回る場合には、不整磁場を修正する磁場調整というプロセスが必要である。この際、相対強度  $\hat{I}$  や放射光スペクトル等の情報は、調整の方向性を考える上で必ずしも有用ではない。言い換えると、アンジュレータを構成する磁石列のどの部分に修正が必要かという情報は全く含まれていない。このためアンジュレータ磁場調整の過程では、実測した磁場分布を用いてスペクトルを計算するのではなく、“位相誤差関数  $\phi$ ” として知られる関数を評価する。位相誤差関数には調整の指針を立てるのに必要な情報が十分に含まれており、これを解析することで効率的な調整を行うことが可能となる。また、 $\phi$  の標準偏差  $\sigma_\phi$  を用いることで、次数  $k$  の

高次光相対強度を

$$\hat{I} = \exp(-k^2\sigma_\phi^2) \quad (1)$$

という簡単な式で、複雑な数値計算無しに精度よく評価できることが知られている [1]。このためアンジュレータ製作に関する仕様書では、相対強度  $\hat{I}$  の代わりに、位相誤差の標準偏差（以後、単純に位相誤差と呼ぶ） $\sigma_\phi$  を不整磁場の許容値として規定することが一般的となっている。

さて容易に理解されるように、ある相対強度に到達するための  $\sigma_\phi$  の許容値は、着目する高次光の次数  $k$  が高いほど厳しくなる。例えば、 $\hat{I} \geq 0.9$ （強度劣化 10% 以下）を満足するための位相誤差は、基本波 ( $k=1$ ) では  $18^\circ$  である一方、15 次光では  $1.2^\circ$  である。磁場周期が短く、従って周期数の多いアンジュレータにおいて、位相誤差  $1.2^\circ$  は極めて難易度の高い目標であり、これを達成するためには、アンジュレータを構成する基本要素の設計や磁場調整作業の方針に十分な留意が必要となる。

上記で述べたように、位相誤差はアンジュレータの仕様策定や製造過程（磁場調整作業）において重要な役割を果たす。これは、留意並びに補正すべき不整磁場という物理量と、光強度というユーザーにとって重要かつ具体的な物理量とを、簡潔な式 (1) で精度よく結びつけるためである。しかしながら最近になって、電子ビームのエミッタンスに代表される各種影響を考慮した実用的条件において、同式が不整磁場を含むアンジュレータ光の相対強度を過小評価する、即ち、不整磁場の影響を過大評価するという報告がなされている [2,3]。言い換えると、実用的条件では位相誤差の影響は緩和される。この結果、アンジュレータの不整磁場を位相誤差で規定する従来の手法では、特に高次光を積極的に利用する条件に

\* ztanaka@spring8.or.jp

において、過度に厳しい条件をアンジュレータの仕様に課す恐れがある。

我々は上記の問題を解決するため、アンジュレータの不整磁場が光強度に及ぼす影響についてフーリエ解析に基づく定式化を行い、実用的条件においても適用可能な位相誤差の表式を導出した [4]。本報告でその手法について簡単に紹介すると共に、位相誤差を大きく劣化させる系統的な不整磁場による影響評価へ適用した結果について解説する。尚、本稿では数式の導出には一切触れないので、興味を持たれた読者の方は上記参考文献をご覧ください。

## 2. 位相誤差の定義と実用条件における緩和効果

位相誤差は、電子がアンジュレータを進む際に形成する光電場波形の位相のばらつきを表す。アンジュレータにおける  $j$  番目の磁極に起因する光電場の位相誤差は次式で定義される。

$$\phi_j = \frac{2\pi/\lambda_u}{1 + K^2/2} \int_0^{z_j} \left[ \gamma^2 \beta_{\perp}^2(z) - \frac{K^2}{2} \right] dz, \quad (2)$$

ここで、 $\lambda_u$  はアンジュレータの周期長、 $K$  は偏向定数、 $\gamma$  は電子のローレンツ因子、 $\beta_{\perp}(z)$  は位置座標  $z$  における電子の相対速度ベクトルを表すが、積  $\gamma\beta_{\perp}$  はアンジュレータ磁場分布の積分で表されるため、位相誤差関数  $\phi$  は、磁場分布関数を与えれば（電子のエネルギーに無関係に）一意に決まる。

例として、各磁極の磁場強度（正弦波磁場の振幅）に乱数で偏差を与えることで不整磁場を表現し、これにより生成される磁場分布を用いて計算した位相誤差関数を Fig. 1 に示す。周期数  $N = 200$ 、 $\lambda_u = 20$  mm、 $K = 2.2$  のアンジュレータについて、乱数のシードと標準偏差を変えることで2つの異なるモデル A 及び B を生成し、磁極番号  $j$  の代わりに、周期番号  $n$ （中心周期を  $n$  の原点と定義）の関数としてプロットしている。

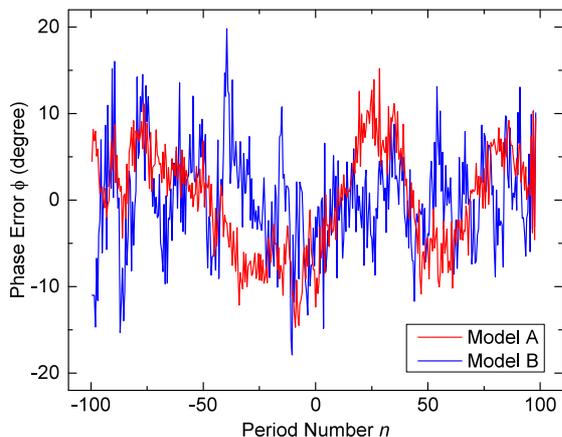


Figure 1: Phase errors calculated for two undulator models A and B.

ちなみにいずれのモデルについても、生成された磁場分布に対して仮想的な磁場調整（磁場振幅の微調）を

行い、位相誤差が  $\sigma_{\phi} = 6^{\circ}$  となるような処理がなされている。

モデル A 及び B における不整磁場の影響、特に高次光への影響について調べるため、電子エネルギーを 6 GeV に設定したとき、光軸上で観測されるアンジュレータ放射光（基本エネルギー 5 keV）のスペクトルを数値計算コード SPECTRA [5] を用いて計算した。単一電子の場合の 15 次光における計算結果を Fig. 2(a) に示す。モデル A 及び B に加えて理想条件でも計算を行い、理想条件での 15 次光のピーク強度で規格化した相対値として示している。位相誤差  $\sigma_{\phi} = 6^{\circ}$  を式 (1) に代入して得られる 15 次光の相対強度は  $\hat{I} = 0.08$ （差し込み図に破線で表示）であり、数値計算で厳密に計算された値をよく再現していることがわかる。これが、アンジュレータの磁場品質として位相誤差が標準的に利用される理由となっている。ちなみに、同図ではモデル A 及び B のスペクトル及び  $\hat{I}$  は 5 倍して表示しているので注意されたい。

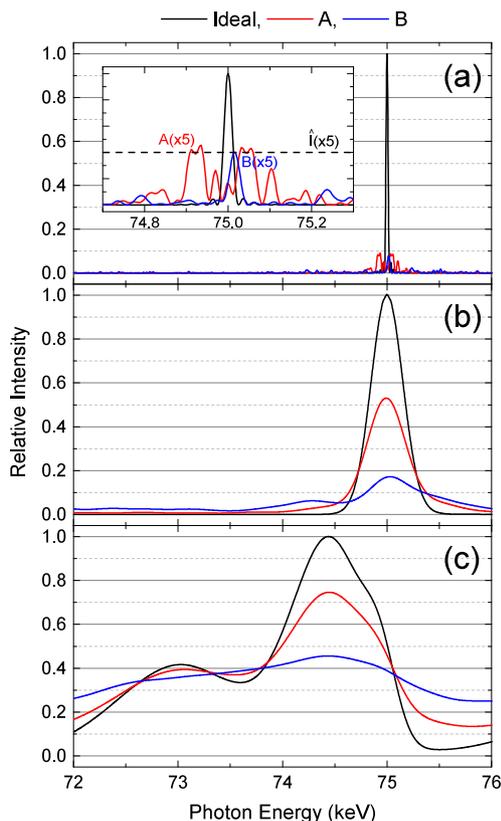


Figure 2: Spectra of undulator radiation computed for the undulator models A and B around the 15th harmonic, for different conditions: (a) single electron, (b) finite energy spread, and (c) finite emittance and angular acceptance.

さて上記は、“単一の電子が光軸上に放出するアンジュレータ放射光”という、極端な条件で得られた結果であり、実用的な条件での比較ではない。実用光源としてのアンジュレータの品質を真に規定するためには、放射光ビームライン下流に設置された試料に到達する光の強度で比較する必要がある。このためには、電子ビームの特性やビームラインの角度アクセプタンス（一般的にはフ

ロントエンドスリットの開口角)を考慮した計算を行う必要がある。例として、電子のエネルギー幅 0.1% を考慮して計算したスペクトルを Fig. 2(b) に示す。モデル A、B とも理想条件に近づいていることがわかる。特にモデル A では理想条件の 50% を超える光強度が利用可能である。Figure 2(c) には、電子ビームのエミッタンスを 1 nm-rad、カップリングを 10%、ベータatron関数を 5 m (水平) 及び 3 m (垂直)、また、角度アクセプタンスを、水平・垂直方向とも光の角度発散の 4 倍に設定して計算したスペクトルを示す。相対強度の回復傾向はより顕著であり、モデル A では理想条件の 80% 近い光強度が利用可能となる。即ち、この条件においてアンジュレータ品質を規定する場合、条件 (a) で規定される品質よりも 1 桁近く良化する。言い換えると、実用条件では位相誤差による影響は大幅に緩和される。さらに、同じ位相誤差を持つモデル A、B であっても緩和効果は大きく異なる。即ち、従来の形式で定義された位相誤差は、実用条件におけるアンジュレータの品質を過小評価するだけではなく、同品質との相関が極めて弱い。

### 3. 位相誤差表式の一般化

上記の問題を解決し、実用条件におけるアンジュレータの品質を正しく規定するためには、位相誤差の表式 (2) を、各種の緩和効果を考慮した形式へ修正する必要がある。このため我々は、不整磁場を含むアンジュレータ放射光の特性に関してフーリエ解析に基づく定式化を行い、さらに緩和効果をコンボリューションの形式で取り込むことで、実用条件でも適用可能な、位相誤差の普遍的な表式 (一般化位相誤差) を導出した [4]。本報告ではその詳細については省略し、一般化位相誤差の計算方法についてのみ解説する。

電子ビームの (規格化) エネルギー幅を  $\sigma_\gamma/\gamma$ 、また、ビームラインの角度アクセプタンスを  $\Delta\theta_x$  及び  $\Delta\theta_y$  で定義する。また、実効的な角度発散  $\sigma_{x'}$  を次式で計算する ( $\sigma_{y'}$  も同様)。

$$\sigma_{x'} = \frac{\sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{x'0}^2(D - Z_w)^2}}{D}$$

ここで、 $Z_w$  は電子ビームの waist position、 $\sigma_{x0}$  及び  $\sigma_{x'0}$  は waist position におけるビームサイズ及び角度発散で、これらは電子ビームのエミッタンス、カップリング、Twiss パラメータで決まる。また  $D$  はアンジュレータ中心 ( $z = 0$ ) からビームラインの角度アクセプタンスを規定する機器までの距離を表す。

上記のパラメータを用いて、次式で定義される緩和因子  $R$  を計算する。

$$R\left(\frac{\sigma_\gamma}{\gamma}, \sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \Delta\theta_x, \Delta\theta_y\right) = \sqrt{1 + Z^2 + X^2 Y^2} \quad (3)$$

ここで、

$$Z^2 = 8\pi \left(kN \frac{\sigma_\gamma}{\gamma}\right)^2$$

及び

$$X^2 = \frac{k}{2\sigma_{r'}} \left[ \sigma_{x'}^2 + \left(\frac{\Delta\theta_x}{\pi}\right)^2 \right]$$

であり ( $Y$  は同様に計算)、 $k$  は着目する高次光の次数、 $N$  はアンジュレータの周期数、 $\sigma_{r'} = \sqrt{\lambda_1/2L}$  は全長  $L$  のアンジュレータ放射光の基本波長  $\lambda_1$  における角度発散である [6]。ちなみに、Fig. 2(b) の条件では  $R \sim 15$  と計算される。

次に、通常の手続きで式 (2) により計算された位相誤差  $\phi$  と、その移動平均  $\langle\phi\rangle$  を平均幅  $N/R$  で計算し、その標準偏差  $\sigma_{\langle\phi\rangle}$  を求める。一般化位相誤差  $\Sigma_\phi$  は次式で定義される。

$$\Sigma_\phi^2 = \sigma_\phi^2 - \sigma_{\langle\phi\rangle}^2 \quad (4)$$

緩和因子  $R$  の増加とともに平均幅  $N/R$  は縮小し、関数  $\langle\phi\rangle$  は  $\phi$  に近づく。この結果、一般化位相誤差  $\Sigma_\phi$  は減少する。ちなみに、実用条件における  $k$  次光の相対強度は、式 (1) に等価な式  $\hat{I} = \exp(-k^2\Sigma_\phi^2)$  で同様に評価可能である。

アンジュレータモデル A について、 $R = 15$  として計算した一般化位相誤差は  $\Sigma_\phi = 2.9^\circ$  であり、 $\sigma_\phi = 6^\circ$  に比べて半分以上緩和されていることがわかる。より詳細に調べるため、関数  $\langle\phi\rangle$  を Fig. 3 に破線で示す。参考のため、元の関数  $\phi$  と、その差  $\phi - \langle\phi\rangle$  も示されている。元の関数  $\phi$  において滑らかに変化する成分が  $\langle\phi\rangle$  で抽出され、 $\phi - \langle\phi\rangle$  で除去されていることがわかる。ちなみに、関数  $\phi - \langle\phi\rangle$  の標準偏差は  $2.5^\circ$  であり、厳密に計算された値  $\Sigma_\phi$  に近い。言い換えると  $\phi - \langle\phi\rangle$  を実用条件における実効的な位相誤差関数と見なすことができる。

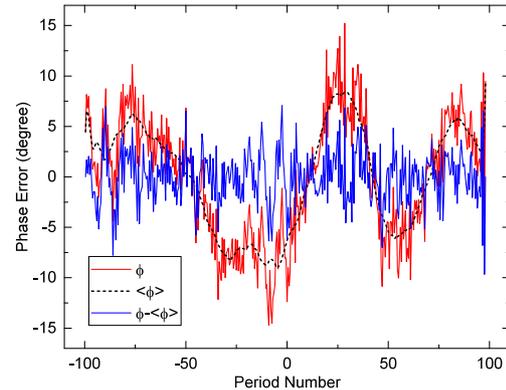


Figure 3: Phase error of the undulator model A: original  $\phi$ , moving average  $\langle\phi\rangle$ , and difference  $\phi - \langle\phi\rangle$ .

ちなみに、アンジュレータモデル B について同様の手続きで求めた一般化位相誤差は  $\Sigma_\phi = 5.4^\circ$  であり、緩和効果が弱い。これは Fig. 1 に示す通り、モデル B における位相誤差関数では、急激に変化する成分が支配的であることによる。 $R = 15$  という緩和因子は、これらの振動成分を除去するには十分ではない。

### 4. 系統的な不整磁場への適用

前節で紹介した一般化位相誤差を用いて、系統的な不整磁場による影響が実用条件で緩和される効果について議論する。ここで系統的な不整磁場とは、アンジュレータの機械的誤差によって生ずる不整磁場を意味する。その例について Fig. 4(a)-4(d) を用いて説明する。一般的なアンジュレータの構造を Fig. 4(a) に模式的に示す。駆動架

台によって上下流 2 点で保持された剛性の高い（通常は金属製）ビームに磁石列を設置し、同ビームを上下方向に移動することによってギャップ開閉を行う。駆動部の機械的精度が悪い場合、Fig. 4(b) に示すように上下流のギャップが一致せず、位置座標  $z$  の一次関数で表されるギャップ偏差（テーパ）が生じる。また、高剛性ビームを切削加工した後反りが生じた場合、Fig. 4(c) に示すように、 $z$  の二次関数で表されるギャップ偏差を生じる。さらに、磁場吸引力と比較してビームの剛性が十分に高くない場合は、ギャップを閉じるにしたがって Fig. 4(d) のように変形し、 $z$  の四次関数で表されるギャップ偏差を生じる。

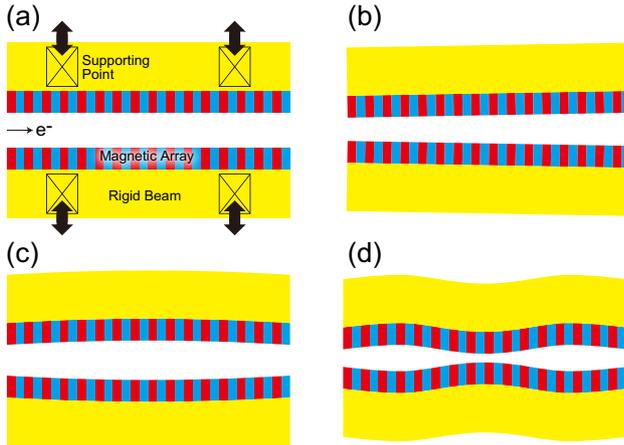


Figure 4: Illustration to explain the systematic field errors in undulators caused by mechanical errors: (a) basic structure of an undulator, and (b) linear, (c) quadratic, and (d) 4th-order gap errors.

さて、このような低次の多項式で表されるギャップ偏差で生じる位相誤差は、以下に示す簡単な式で計算できることが知られている [7]。

$$\phi(n) = 2\pi \frac{K^2}{1 + K^2/2} \int_0^n \eta(n') dn'$$

ここで、

$$\eta(n) = \frac{B(n) - B_0}{B_0}$$

は  $n$  番目の周期における磁場偏差を表し、 $B(n)$  はピーク磁場、 $B_0$  はその平均である。また、位相誤差は磁極番号  $j$  ではなく、周期番号  $n$  の関数として表されている。位相誤差関数は磁場偏差（従ってギャップ偏差）を表す関数の積分で与えられる。このとき、位相誤差  $\sigma_\phi$  は解析的に求めることができ、例えば Fig. 4(b) に示すテーパの場合、次式で与えられる。

$$\sigma_\phi = 2\pi \frac{K^2}{1 + K^2/2} \frac{\eta_0 N}{6\sqrt{5}}$$

ここで、 $\eta_0$  は  $\eta$  の最大値である。例えば、周期長 20 mm、周期数 200 のハルバック型アンジュレータにおいて、テーパによって  $5 \mu\text{m}$  のギャップ偏差が生じた場

合、 $\eta_0 = 7.9 \times 10^{-4}$  であり、これに相当する位相誤差は  $\sigma_\phi = 6.0^\circ$  と計算される。高次光の積極的な利用を想定する場合、従来の考え方では  $6.0^\circ$  という位相誤差（例えば 15 次光で  $\hat{I} = 0.08$ ）は許容されない。一方これまで議論してきた通り、実用条件における  $\hat{I}$  はこの値よりも遥かに高くなることが予測される。言い換えると、緩和因子が系統的な不整磁場に与える影響について調査する必要がある。

上記で議論した意味における系統的な不整磁場においては（ $\eta$  が低次の多項式で表される場合には）、一般化位相誤差と（従来の）位相誤差の比  $\Sigma_\phi/\sigma_\phi$  を解析的に求めることが可能であり、例えばテーパの場合は次式で表される。

$$\frac{\Sigma_\phi^2}{\sigma_\phi^2} = \frac{90}{\pi^4} \sum_{m=1}^N \frac{1}{m^4} \left[ 1 - \text{sinc}^2\left(\frac{\pi m}{R}\right) \right] \quad (5)$$

ここで、 $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$  を導入した。ちなみに上記方程式における和は、 $m^{-4}$  という因子のため  $m$  に対して急速に収束する。この結果、 $\Sigma_\phi/\sigma_\phi$  は周期数  $N$  に殆ど依存せず、緩和因子  $R$  のみの関数として計算できる。また、式 (5) はテーパ誤差（一次系統誤差）に関するものであるが、二次以上の系統誤差についても同様の式を導出することができる。Figure 5 に、三次までの系統誤差に関して計算した  $\Sigma_\phi/\sigma_\phi$  を緩和因子  $R$  の関数として示す。いずれの次数においても、 $R$  の増加に伴って急速に  $\Sigma_\phi/\sigma_\phi$  が減少すること、即ち位相誤差が緩和されることがわかる。

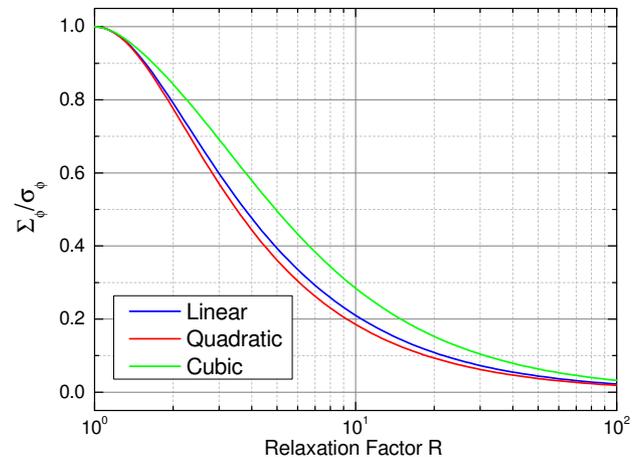


Figure 5: 系統的な不整磁場による位相誤差の緩和例。

例として Fig. 2(b) に相当する  $R = 15$  を仮定すると、 $\Sigma_\phi/\sigma_\phi \sim 0.2$  であり、さきほど挙げたテーパ誤差の例（ $\sigma_\phi = 6.0^\circ$ ）では  $\Sigma_\phi = 1.2^\circ$ 、即ち 15 次光で  $\hat{I} = 0.9$  と計算される。このように、系統的な不整磁場による影響は実用条件において大幅に緩和される。

## 5. まとめ

本稿では、アンジュレータの磁場品質を規定する従来の位相誤差（ $\sigma_\phi$ ）の概念を拡張し、電子ビームのエネルギー幅やエミッタンス、さらにはビームラインの角度ア

クセプタンスを考慮した実用的な条件でも適用可能な一般化位相誤差 ( $\Sigma_\phi$ ) の概略について紹介するとともに、その応用例として、系統的な不整磁場によるアンジュレータ品質への影響評価を行った。

アンジュレータの仕様策定における従来の考え方では、比較的大きな位相誤差の元凶となる、機械的誤差を原因とする系統的な不整磁場は可能な限り除去する必要があり、これがアンジュレータを構成する個々の機械要素の精度に過度に厳しい要求を課してきた。しかしながら本稿で示した通り、系統的な不整磁場による影響は実用条件下では大幅に緩和されるため、これらの要求仕様が真に妥当か否かを再検討する必要がある。

## 謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP18H03691 の助成を受けています。

## 参考文献

- [1] R. Walker, “Interference effects in undulator and wiggler radiation sources”, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 335, pp. 328 – 337 (1993).
- [2] S. Casalbuoni, T. Baumbach, S. Gerstl, A. Grau, M. Hagelstein, T. Holubek, D. S. de Jauregui, C. Boffo, and W. Walter, “Calculated spectra from magnetic field measurements of 1.5 m superconducting undulator coils”, in Proceedings of IPAC2012, New Orleans, Louisiana, USA, (JACoW, Geneva, Switzerland, 2012), pp. 711–713.
- [3] R. P. Walker, “Phase errors and their effect on undulator radiation properties”, Phys. Rev. ST Accel. Beams 16, 010704 (2013).
- [4] T. Tanaka, “Universal representation of undulator phase errors”, Phys. Rev. Accel. Beams 21, 110704 (2018).
- [5] T. Tanaka and H. Kitamura, “SPECTRA: a synchrotron radiation calculation code”, Journal of Synchrotron Radiation 8, pp. 1221–1228 (2001).
- [6] K. J. Kim, “Characteristics of synchrotron radiation”, AIP Conference Proceedings, 184, pp. 565–632 (1989).
- [7] T. Tanaka, T. Seike, A. Kagamihata, T. Schmidt, A. Anghel, M. Brügger, W. Bulgheroni, B. Jakob, and H. Kitamura, “In situ correction of field errors induced by temperature gradient in cryogenic undulators”, Phys. Rev. ST Accel. Beams 12, 120702 (2009).