二粒子対変換を用いた荷電粒子位相空間分布のマクロ粒子数依存性の解析

ANALYSIS OF EFFECT OF MACRO-PARTICLE NUMBER ON PHASE SPACE DISTRIBUTION OF CHARGED PARTICLE BEAM USING PARTICLE PAIR TRANSFORMATION

宮島 司 *A)
Tsukasa Miyajima*A),
A)KEK, 1-1 Oho, Tsukuba, Ibaraki, 305-0801

Abstract

To describe a charged particle beam in an accelerator, macro-particle method is widely used in numerical simulation. In order to analyze the effect of number of macro-particles on the resolution in the phase space distribution, particle pair transformation, which is a transformation to reduce the number of macro-particles, was defined. The particle pair transformation was applied to two dimensional uniform circular distribution, Using the transformation, the resolution in the virtual phase space distributions, x-E_x and y-E_y, which are calculated from the static electric field caused by the particle distribution, was analyzed. In the analysis, random algorithm and quasi-random algorithm were used to generate the initial particle distributions. The random algorithm occasionally generates a particle pair, whose distance is extremely short, and it causes strong electric field. It increases the virtual emittance in x-E_x and y-E_y spaces. When the number of macro-particles was reduced by the particle pair transformation, the average particle distance was extended and made even, and the virtual emittance converged for both the random and the quasi-random algorithms.

1． はじめに

荷電粒子ビームの数値解析においては、近似を利用して系の自由度を減らす方法が広く用いられている。特に、系に何らかの対称性がある場合には、その対称性を利用してビームを表現するのが良い近似となる。例えば、系に円筒対称性がある場合には、多数の円板状電荷分布の集まりとしてビームを表現することが可能であり、このときビームは各円板の半径と厚さによって記述される。ただしこの場合には、円板内の電荷分布は一様であるという仮定を用いている。現実の加速器中では対称性が崩れてくることが多いため、より汎用的な方法が用いられることが多い。

系の自由度を減らしてビームを表現する汎用的な方法として、複数の荷電粒子を一つに纏めたマクロ粒子に置き換える方法が広く用いられている。ここでの根本的な問いが、どれくらいの粒子数を用いれば要求される解析精度が確保されるか、ということである。これに答えるための基礎的な研究として、これまでに、マクロ粒子に置き換える操作の整理 [1] と、マクロ粒子を用いて自由度を減らす操作を定量化するために新たな変換操作の定義（二粒子対変換の導入）を行ってきた [2]。今回の報告では、二粒子対変換を適用してマクロ粒子を減らしていったときに、位相空間上のどのような情報が失われていくかについて、2 次元の荷電粒子分布に対して解析した結果を報告する。

二粒子対変換は、マクロ粒子数を減らす操作を定式化するために導入した簡単な変換操作であり、これを用いることで、ある荷電粒子分布からその粒子数を半分に減らした新たな粒子分布を生成することが可能となる。これまでに、この二粒子対変換を 1 次元粒子分布に適用して粒子数を減らす変換を繰り返したとき、近接する粒子間距離と、その静電場から計算した仮想的な位相空間分布がどのように変化するかについて定量的に評価してきた [2]。今回の報告では、この二粒子対変換を 2 次元一様円分布に適用する。初期分布を生成する方法として、準乱数と通常の乱数を用いる。準乱数を用いた場合には、近接する粒子間距離が一様に近くなるように制御されるが、通常の乱数を用いた場合には、粒子間距離が極端に短い粒子対が生成されることもある。この 2 つ初期分布から出発して二粒子対変換を繰り返し、初期分布の影響を比較する。次のセクションでは、マクロ粒子によるビームの表現について整理する。

* tsukasa@post.kek.jp

2． マクロ粒子によるビームの表現

電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ 中での電子 (質量 m_e、電荷 e) の運動を考える。電子の運動方程式は、

$$c\frac{m_e}{e}\frac{d(\gamma\boldsymbol{\beta})}{dt} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}, \tag{1}$$

となる。ここで、c は光の速さ、$\boldsymbol{v}$ は電子の速度とし、$\beta = v/c$、$\gamma = 1/\sqrt{\beta^2 - 1}$ とする。

N 個の電子から構成されるビームを、M 個のマクロ粒子で表現することを考える。ビームの性質を保持するには、質量電荷比を同じにする必要がある。図 1 に示すように、一つのマクロ粒子は $a(= N/M)$ の電子をひ

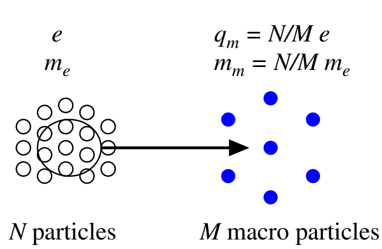

Figure 1: Description of charged particle beam by macro-particle model. The mass-to-charge ratio is a conserved quantity.

とまとめにしたものに対応する。マクロ粒子の質量と電荷は、それぞれ $m_m = am_e$、$q_m = ae$ となる。マクロ粒子の運動方程式は、

$$c\frac{m_m}{q_m}\frac{d(\gamma\boldsymbol{\beta})}{dt} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \quad (2)$$

となる。この方程式は $m_e/e = m_m/q_m$ であるため、元の電子の運動方程式 (1) と同じになる。このように、マクロ粒子によるビームの表現は、質量電荷比を保持した質量 am_e、電荷 ae をもつ M 個の荷電粒子で元のビームを近似することに対応する。

粒子数を減らしてビームを表現する場合、元の分布に比べてマクロ粒子の間隔が伸びることになる。これは、ビームの運動状態を記述する位相空間分布の分解能が粗くなり、情報が失われていくことに対応する。また、空間電荷効果がある場合には、ビーム自身が作る電磁場の分解能も粗くなっていく。元のビームの性質を保つには、適切な粒子数 M を選択することが重要となる。

マクロ粒子数と位相空間の分解能の関係が示せれば、粒子追跡計算などシミュレーション計算において適切な粒子数を選択するために極めて有効であるが、この解析は容易ではない。そこで、まず単純なモデルから出発して、粒子数を減らしてビームを表現したときに、どのように位相空間分布の情報が失われていくかを解析することにした。このために、粒子数を減らす操作として、次に示す二粒子対変換を定義した。

3. 二粒子対変換

元となる荷電粒子分布として、質量 m_{m0}、電荷 q_{m0} をもつ n_0 個のマクロ粒子から構成される粒子分布を考える。二粒子対変換 [1] は次の 5 つの手順からなる。

1. 元の粒子分布の重心を計算
2. 重心から最も遠くにある粒子と、それに最近接の粒子を選ぶ
3. 選んだ二つの粒子の平均位置を計算
4. 選んだ二つの粒子を新たな一つのマクロ粒子で置き換える（新たなマクロ粒子：位置は 3. の平均位置、質量は $m_{m1} = 2m_{m0}$、電荷は $q_{m1} = 2q_{m0}$）
5. 元の粒子分布の粒子がすべて置き換わるまで、2. 〜 4. の操作を繰り返す

図 2 に、1 次元分布（線電荷分布）に対するの二粒子対変換を示す。二粒子対変換のあとの粒子数は、$n_1 = n_0/2$ と元の分布の半分になる。二粒子対変換を i 回繰り返したあとの粒子数は、$n_i = n_0/i$ となる。この変換を繰り返すためには、元の粒子数が 2^n である必要があり、任意の粒子数を選べないという制限が掛かる。しかしながら、二粒子対変換は粒子分布の変換性を調べることが目的であるため、この制限は大きな問題とはならない。図 3 に二次元分布に対する二粒子対変換を示す。1 次元の場合と同様に、分布の重心から最も遠い粒子を選択して、それと最近接の粒子を新たなマクロ粒子に置き換える。このように単純な手順によって、元の粒子から粒子数を減らした新たな分布を作ることができる。変換前後の分布を比較することによって、どのような情報が失われていくかを定量化することができる。次に、二次元粒子分布に対して二粒子対変換を繰り返したときの影響を報告する。

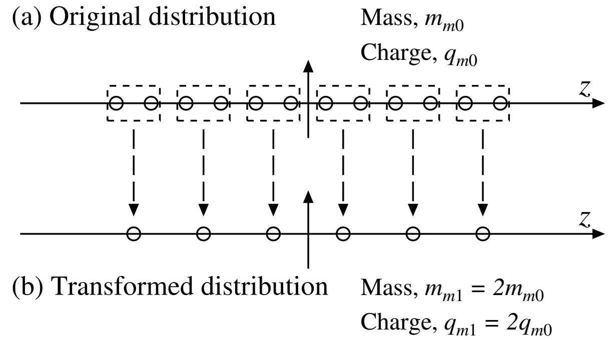

Figure 2: Particle pair transformation for one dimensional particle distribution.

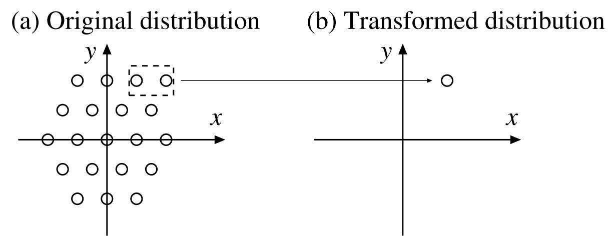

Figure 3: Particle pair transformation for two dimensional particle distribution.

4. 二次元静電場分布の解析

ここでの解析では、荷電粒子分布が作る静電場を計算し、荷電粒子の位置とその位置における電場の強さから仮想的な位相空間 [1] を求め、その分解能がどのように変化していくかを調べる。1 次元分布に対して二粒子対変換を適用した場合には、当たり前の結果であるが変換を繰り返すごとに平均粒子間隔が伸びていくことが示され、この変換によって粒子数を減らす操作を定式化できることが確認されている [1]。

2 次元荷電粒子分布として、x-y 空間上の一様円分布を考える。粒子分布は半径 5 mm、全体の電荷 −100 pC をもつ電子ビームとする。元の分布は、$n_0 = 16384$ 個のマクロ粒子数によって表現されているとする。このとき元の分布の 1 つのマクロ粒子が含む電子数は $a_0 = 38333$ となり、各マクロ粒子は質量 $m_{m0} = a_0 m_e$、電荷 $q_{m0} = a_0 e$ をもつ。元の粒子分布は、General Particle Tracer (GPT) [3] によって生成された。

仮想的な位相空間 x-E_x、y-E_y を求めるために、この粒子分布が作る静電場 E_x, E_y を点電荷モデルによって計算する。i 回の二粒子対変換を行ったとき、j 番目のマクロ粒子位置に生じる電場は、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_j) = \frac{q_{mi}}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k\neq j}\frac{\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k|^3}, \quad (3)$$

と計算される。

ここでは初期分布を二通りの乱数を用いて生成した。一つは準乱数 (quasi-random algorithm) であり、この場合には粒子間隔は一様に近くなるように制御される。も

[1] 磁場 B がゼロの場合、運動量の変化は電場 E に比例することになり、位置と電場から仮想的な位相空間を考える。

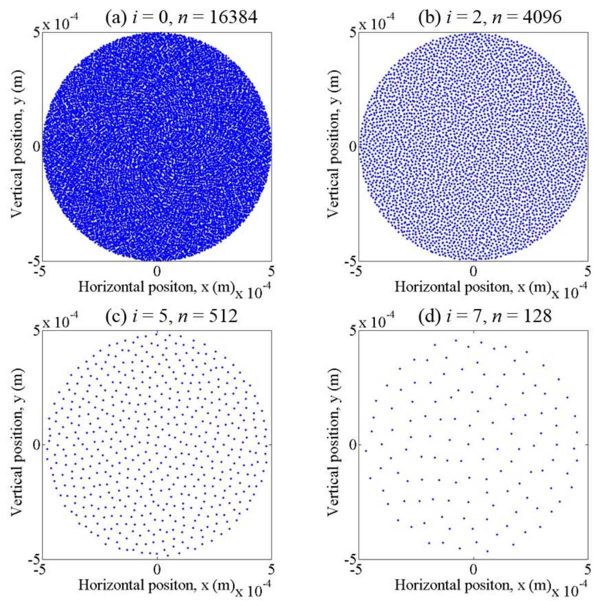

Figure 4: Two dimensional particle distribution on x-y plane before and after two pair particle transformation. The numbers of particles are 16384, 4096, 512, and 128. The initial distribution is a circular uniform distribution generated by quasi-random algorithm.

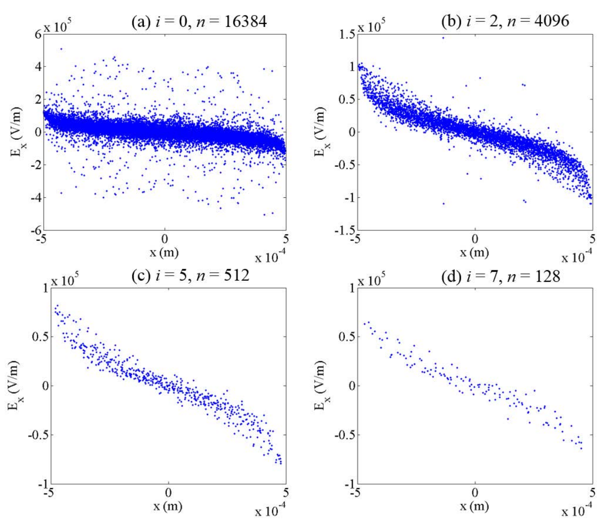

Figure 5: Particle distribution on x-E_x space for two dimensional distribution before and after particle pair transformations. The numbers of particles are 16384, 4096, 512, and 128. The initial distribution is a circular uniform distribution generated by quasi-random algorithm.

う一つは通常の乱数 (random algorithm) であり、この場合には粒子間隔に対する制御はなく、極端に粒子間距離の短い粒子対が生成される場合もある。図 4 に、準乱数で生成した初期分布に二粒子対変換を行ったときの x-y 空間の粒子分布 (変換回数 i = 0, 2, 5, 7) を示す。二粒子対変換を繰り返すごとに、粒子間隔が伸びていくことがわかる。図 4 の x-y 空間分布から計算した x-E_x 空間分布上の粒子分布を図 5 に示す。図 5 に示すよう

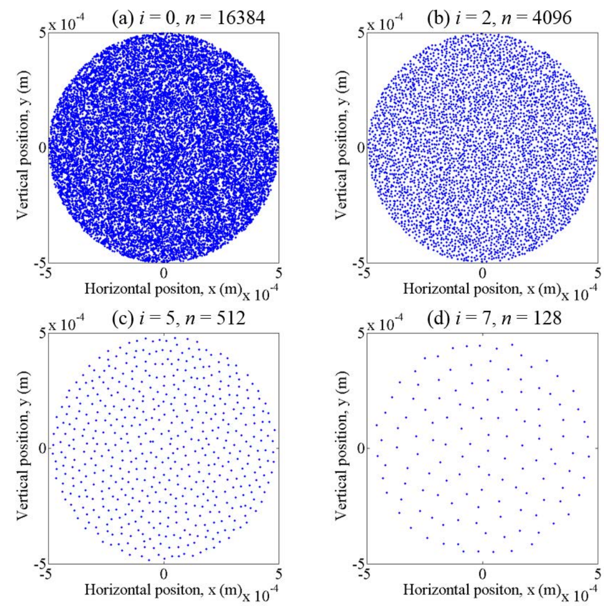

Figure 6: Two dimensional particle distribution on x-y plane before and after two pair particle transformation. The numbers of particles are 16384, 4096, 512, and 128. The initial distribution is a circular uniform distribution generated by random algorithm.

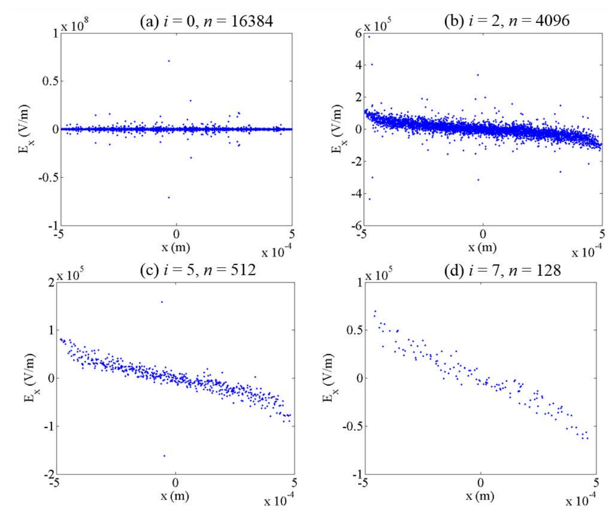

Figure 7: Particle distribution on x-E_x space for two dimensional distribution before and after particle pair transformations. The numbers of particles are 16384, 4096, 512, and 128. The initial distribution is a circular uniform distribution generated by random algorithm.

に、$i = 0$ では強い電場が生じている部分があるが、変換を繰り返して粒子数が減ると強い電場が均されてくる。$i > 2$ ではほぼ同じような x-E_x 空間分布になることがわかる。

図 6 に、乱数で生成した初期分布に二粒子対変換を行ったときの x-y 空間の粒子分布 (変換回数 i = 0, 2, 5, 7) を示す。また、この分布から求めた x-E_x 空間分布を図 7 示す。$i = 0$ の場合の x-y 空間の初期分布を比較す

ると、乱数から生成した分布は粒子間距離の変化が大きいことがわかる。これは、準乱数の場合には近接粒子間距離が一様に近くなるように制御されているが、乱数分布の場合には完全にランダムに初期位置が決定されるため、極めて距離が近くなる粒子対が生じることを示している。このときの x-E_x 空間分布を見ると、乱数から生成した分布の場合には、ときどき生じる粒子間距離が近い粒子対によって極めて強い電場が生じていることがわかる。このように初期分布の生成の仕方によって、同じ一様分布の場合でも仮想的な位相空間で大きな差が生じていることがわかる。

仮想的な位相空間に対する初期分布、粒子数の影響を定量的に比較するために、エミッタンスに相当する物理量を導入する。通常の位相空間における rms エミッタンスと同様に、x-E_x 空間と y-E_y 空間分布に対して、仮想的なエミッタンスを

$$a_x = \sqrt{\langle x_c\rangle^2\langle E_{xc}\rangle^2 - \langle x_c E_{xc}\rangle^2}, \tag{4}$$
$$a_y = \sqrt{\langle y_c\rangle^2\langle E_{yc}\rangle^2 - \langle y_c E_{yc}\rangle^2}, \tag{5}$$

と定義する。ここで、

$$x_c = x - \langle x\rangle, \tag{6}$$
$$y_c = y - \langle y\rangle, \tag{7}$$

とし、

$$E_{xc} = E_x - \langle E_x\rangle, \tag{8}$$
$$E_{yc} = E_y - \langle E_y\rangle, \tag{9}$$

とする。また、$\langle\rangle$ は分布に関する平均を表すものとする。図 8 に、2 つの初期分布から変換を繰り返したときの仮想的なエミッタンス $a = (a_x + a_y)/2$ の変化を示す。$i = 0$（変換前）の場合、a は乱数分布の場合に非常に大きくなる。乱数から初期分布を生成した場合に生じる少数の粒子間距離が極めて近いものがこれに寄与している。$i > 4$ では初期分布がどちらの場合でもほぼ同じ値に収束してくる。このことより、ある程度変換を繰り返して粒子数が減ってくると、位相空間分布の細かい構造が作っていた情報が喪失することがわかる。また、初期分布を乱数から生成した場合でも、変換を繰り返すことで微細な構造が消えて、準乱数から生成した場合と同じ値に収束していくことが確認された。

以上のように二粒子対変換を簡単な系に適用することによって、位相空間の情報が失われていく様子を定量的に示すことができた。

5． まとめ

マクロ粒子数を変えたときに位相空間分布の分解能がどのように変化するか調べるために、マクロ粒子数を減らす操作を二粒子対変換によって定式化した。この二粒子対変換を 2 次元一様円分布に適用して、粒子数を減らした時の変換性を調べた。粒子の空間分布とその分布が作る静電場から仮想的な位相空間を定義し、その空間上の面積に相当する仮想的なエミッタンスが変換によってどのように変化するかを解析した。初期粒子分布を乱数と準乱数の 2 つの異なる方法で生成し、二粒子対変換によって仮想的な位相空間分布が変化する様子を追跡した。乱数で初期分布を生成した場合には、ときどき極めて粒子間距離の短い粒子対が生成され、これが強い電場を作り、仮想的なエミッタンスを増大させることに寄与することが確認された。二粒子対変換を繰り返し、粒子数を減らしていくと、粒子間隔が均されて、どちらの初期分布から開始してもほぼ同じ位相空間分布に行き着くことが確認された。今後、この二粒子対変換を 3 次元ビームに適用し、より現実的なビームの変換規則の解析を進める予定である。

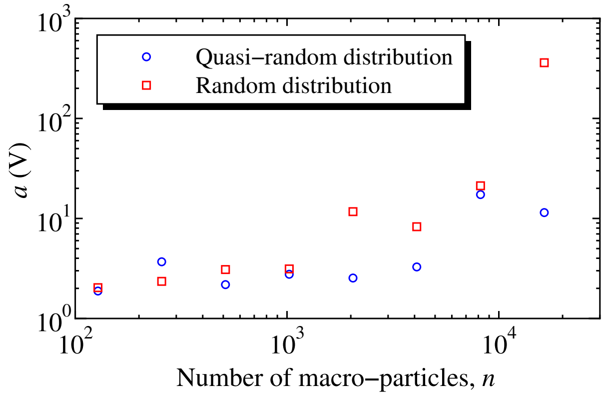

Figure 8: Effect of the number of particle pair transformations on average of areas on x-E_x and y-E_y spaces, $(a_x + a_y)/2$, for two dimensional particle distributions in Fig. 5 and Fig. 7.

6． 謝辞

本研究は JSPS 科研費 (26600147) の助成を受けたものである。また、計算コード実装に当たっては廣藤直也氏（三菱電機システムサービス）に協力していただいた。

参考文献

[1] T. Miyajima, “Description of charged particle beam”, in Proc. of the 9th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan, pp. 134-137 (2012).

[2] T. Miyajima, “Effect of number of macro particles on resolution in phase space distribution”, in Proc. of IPAC’15, Richmond, USA (2015), MOPWA054.

[3] Pulsar Physics, http://www.pulsar.nl/gpt/index.html