

# 遮蔽効果を考慮した表面電流モデルを用いたスミス・パーセル放射の評価 EVALUATION OF SMITH-PURCELL RADIATION USING SURFACE CURRENT MODEL WITH SHADING EFFECT

山田 悠樹<sup>#</sup>, 武藤 俊哉, 日出 富士雄, 柏木 茂, 南部 健一, 長澤 育郎, 高橋 健, 柴田 晃太郎,  
B. Kavar Anjali, 工藤 滉大, 濱 広幸

Hiroki Yamada<sup>#</sup>, Toshiya Muto, Fujio Hinode, Shigeru Kashiwagi, Kenichi Nanbu, Ikuro Nagasawa, Ken Takahashi,  
Kotaro Shibata, Anjali B. Kavar, Kodai Kudo, Hiroyuki Hama

Research Center for Accelerator and Radioisotope Science, Tohoku University

## Abstract

At the test accelerator t-ACTS in the Research Center for Accelerator and Radioisotope Science, Tohoku University, we are conducting experimental research in coherent Smith-Purcell radiation (CSPR) in the terahertz region and its application to bunch length monitors using extremely short electron bunches with bunch lengths of less than 100 fs. A calculation model called the surface current model has been widely used to calculate the intensity distribution of this CSPR. However, in our previous measurements, measured results showed different behavior than simple surface current model calculations. To address this issue, we considered modifying the model by considering the shading effect due to the structure of the grating. When the shading effect is included to conventional surface current model, the polarization, azimuthal distribution, and differences between SPR intensities from gratings with different blaze angles are different from the calculated by conventional model. We performed calculations for the presence or absence of shading effects and compared them with measured data.

## 1. はじめに

コヒーレントスミス＝パーセル放射(CSPR)はビーム非破壊で放射が得られるという点、周期長により周波数範囲を選択でき、観測角により周波数が分散しているという点からビーム非破壊のビームモニターとしての応用が検討されている[1]。スミス・パーセル放射の分布を計算するために表面電流モデルが広く用いられている[2]。これは回折格子上空を電子が通過する際に回折格子表面に誘起される表面電荷の動きを電流としてあらわすことで SPR を計算するモデルである[3]。表面に誘起される電荷は、真空中を運動する電子が金属表面に作る電場の垂直成分で与えられる。従来の表面電流モデルでは、遅延時刻での電子による電場が回折格子の上端部で遮られる効果(遮蔽効果)は考慮されていない。しかし、我々が先に行った測定では、その影響は無視できないことが示唆されている[4]。遮蔽効果を考えた場合、方位角分布や偏光成分、傾斜角の異なる回折格子の角度分布の強度差などが遮蔽効果を考えない場合と大きく異なることが予想される。これについて計算と測定の比較を行った。

## 2. 遮蔽効果を考慮した計算

### 2.1 表面電流モデルと遮蔽効果

ビーム進行方向をz軸、回折格子表面と垂直な軸をx軸、回折格子の溝と平行な軸をy軸としz軸と観測方向 $\vec{n}$ がなす角を観測角 $\theta$ 、 $\vec{n}$ のx-y平面への投影とx軸のなす角を方位角 $\varphi$ と定義する。表面電流 $\vec{j}$ は表面電荷密度 $\rho$ とその速度 $v$ の積であらわされる。表面電荷密度 $\rho$ は回

折格子表面における電場の垂直成分に比例する。Liénard-Wiechert potentials に基づき真空中を運動する電子がある時刻 $t$ に作る電場は

$$\vec{E}_{ele}(\vec{r}_r, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{n}_r - \vec{\beta}}{R^2(1 - \vec{n}_r \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{ret} \quad (1)$$

であらわされる。この電場は遅延時間 $t_r = t - \frac{R(t_r)}{c}$ において評価される。 $\vec{n}_r$ は遅延時間における電子から回折格子上の点 $\vec{r}_r$ への単位ベクトルであり $R$ はその距離である。Figure 1 のように 1 周期が二面の三角形からなる回折格子の場合を考える。ビーム上流にある面を第 1 面、下流側にある面を第 2 面、第 1 面の傾斜角を $\alpha$ 、周期長を $d$ 、回折格子の溝の底から電子までの距離(インパクトパラメータ)を $h$ と定義する。ここで頂角は 90 度である。Liénard-Wiechert potentials に基づいて電子からの電場を考えると、時刻 $t$ における回折格子上の点 $\vec{r}_r$ における電場は遅延時間 $t_r$ における電子から出る電磁場の寄与で決まる。その進行方向に構造があると電子からは見えないので届かないことが考えられる。これが遮蔽効果である(Fig.1)。ここでは電場の回折は考慮していない。このように電場がさえぎられる時、第 1 面においては面の途中から徐々に表面電荷が誘起される。また第 2 面には表面電荷が誘起されない。従来計算に用いられた表面電

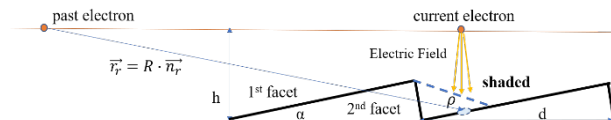


Figure 1: Schematic diagram of shading effect.

<sup>#</sup> yamada@raris.tohoku.ac.jp

流モデルでは、回折格子のすべての面において同じように電荷が誘起され移動すると考えられているため、遮蔽効果を考えた場合と異なる分布となる。回折格子の第1面では表面電流ベクトルはビーム軸にほとんど平行な方向を向いているが第2面ではビーム中心から発散する方向である。遮蔽効果を考慮した場合第2面の寄与が小さくなることにより方位角分布と偏光成分が従来の計算と大きく異なる。SPRの偏光成分について回折格子の溝と平行な成分をS偏光、回折格子の溝と垂直な成分をP偏光と定義する。遮蔽効果を考えた場合には両方の偏光成分が含まれるが、遮蔽効果を考えると回折格子の傾斜角が十分浅い時にはほとんどP偏光のみになる。また、第1面において遮蔽される範囲は傾斜角が大きくなるほど広がる。その結果、遮蔽効果を考えると傾斜角が大きい場合に強度が小さくなることが予想される。一方で従来の表面電流モデルでは25度程度までは傾斜角が大きいほど強度が大きくなる。このような差異が遮蔽効果の有無で現れると予想される。

## 2.2 遮蔽効果の有無による計算の差異の比較

従来の表面電流モデルの計算は[3]で示されるような解析的に解いた式によってなされてきた。しかし、遮蔽効果を考慮する場合はそのままこの計算を用いることはできない。そこで三次元数値計算による積分計算を行う。電流密度 $\vec{j}$ により $\vec{n}$ の方向に放射されるエネルギーの分布は

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \omega \partial \Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int dt \int dx dy dz \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{j}_{total}(\vec{r}, t) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right|^2 \quad (2)$$

であらわされる。全体の表面電流 $\vec{j}_{total}$ は各周期の表面電流の総和である。まずある時間 $t$ における1周期の表面電流 $\vec{j}_1(\vec{r}_r, t)$ を計算する。これは回折格子表面においてメッシュを切ってそれぞれの位置での表面電流ベクトルを $\rho$ と $v$ から計算する。メッシュサイズは $y=50 \mu\text{m}$ 、 $z=10 \mu\text{m}$ 、 $t=5 \text{fsec}$ とした。次に積分の中身である $\vec{n}_n \times \vec{n}_n \times \vec{j}_n(\vec{r}_r, t) e^{i\omega(t - \frac{R}{c})}$ について遅延時間に基づいて計

算する。これを $y$ と $z$ について積分する。この時積分は回折格子の面上に限られるため $x$ は $z$ に基づいて一意に決まる。これらの計算を時間 $t + \Delta t$ に進め繰り返して行うことで数値計算を行うことができる。積分範囲は $y$ 方向には回折格子の幅である $\pm 5 \text{mm}$ とし、 $z$ 方向は電子の位置から $\pm 200 \mu\text{m}$ 、時間範囲は1周期の上を通過する前後 $2 \text{psec}$ である $-2 \text{psec} \sim 4 \text{psec}$ とし、周波数積分は共鳴周波数の $\pm 10\%$ について31分割して計算した。 $l_0$ は実際の光路長である $300 \text{mm}$ とした。この時一次光については十分遠方とみなせることを確認した。観測点は $\theta$ 方向には $25$ 度から $95$ 度まで $5$ 度ステップ、 $\varphi$ 方向には $0$ 度から $10$ 度まで $0.5$ 度ステップで設定した。この方法で遮蔽効果を考えた場合の第1面における表面電荷密度の変化を評価することができる。また、遮蔽効果を考慮しない場合の計算は従来用いられてきた計算とほとんど一致することを確認した[5]。方位角分布は遮蔽効果を考慮しない場合は $\varphi=0$ で極小値をとるダブルピーク構造を持つ。また二つの偏光成分が含まれる。遮蔽効果を考慮すると $\varphi=0$ で最大値をとるシングルピーク構造を持ち、偏光成分はほぼ $100\%$ P偏光である。 $\theta$ 分布は遮蔽効果を考慮しない場合は回折格子の傾斜角が大きい場合より強度が大きい。しかし、遮蔽効果を考慮した場合には、傾斜角が小さい場合より強度が大きい。また分布の形状も異なる。Figure 2に傾斜角 $\alpha=6$ 度と $\alpha=12$ 度の場合について遮蔽効果を考慮しない場合と考慮した場合の計算結果を示す。ここでは $\varphi=0$  バンチ長 $100 \text{fs}$  インパクトパラメータ $500 \mu\text{m}$ とし、基本波から第3次高調波までの合計をプロットしている。

## 3. 測定結果

遮蔽効果の影響を調べるため、傾斜角の異なる2種類の回折格子に対して確かめる測定を行った。実験は東北大学電子光理学研究センターの試験加速器 t-

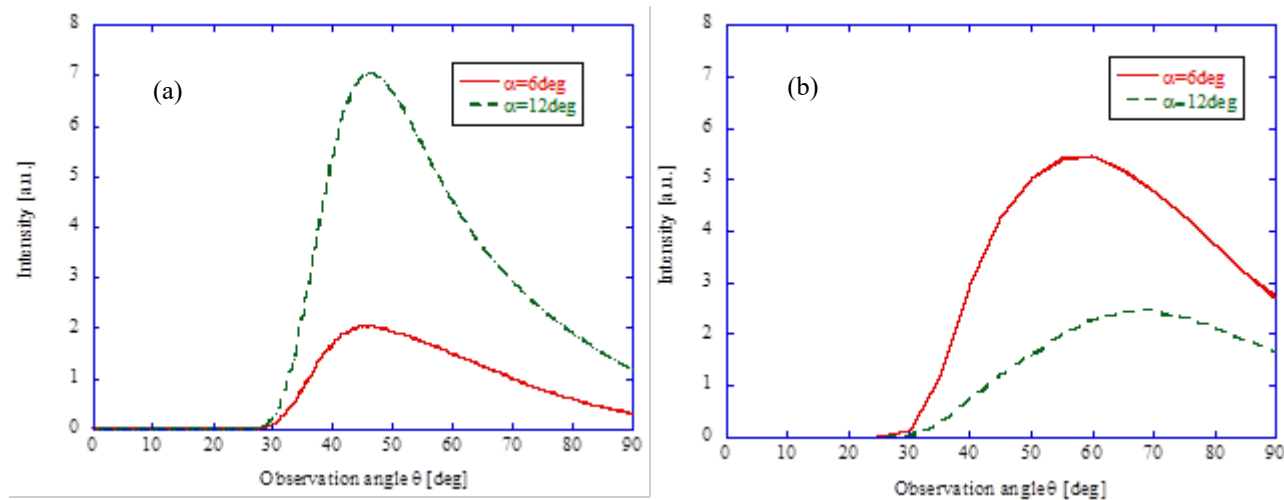


Figure 2: Comparison of calculation results for different blaze angles  $\alpha=6$  deg and  $\alpha=12$  deg (a) without shading effect (b) with shading effect.

ACTSで行った。測定に当たっては第一面の傾斜角  $\alpha$  が 6 度と 12 度の 2 種類の回折格子を準備した。どちらも周期長 600  $\mu\text{m}$  周期数 21 頂角 90 度の条件である。測定は方位角分布の測定、偏光成分の測定、それぞれの回折格子での角度分布測定を行った。ビームパラメータを表 1 に示す。CSPR の検出には、テラヘルツ帯域で高感度・広帯域の焦電型検出器 THz10 (SLT センサーアンドレーザーテック社製) を用いた。集光のために直径 1 インチのレンズが取り付けられている。また、溝のないダミーブロックを用いてバックグラウンドを測定し測定結果から差し引いた。

### 3.1 偏光測定

偏光子にはテラヘルツ域の偏光測定に広く用いられるワイヤグリッドを用いた。ワイヤグリッドの回転角  $\theta_r$  について回折格子と平行な向きを 0 度と定義する。 $\theta_r$  が 0 度、180 度の時は P 偏光のみが透過し、90 度、270 度におい

Table 1: Beam Parameters

macro-pulse duration	$\sim 2.0 \mu\text{s}$
Number of bunches	$\sim 5700$ (per macro-pulse)
Beam energy	22 MeV
Beam emittance	$\sim 3 \mu\text{m mrad}$
Bunch charge	3 $\sim$ 10 pC
Bunch length ( $\sigma_t$ )	80 $\sim$ 100 fs

ては S 偏光のみが透過する。観測角  $\theta = 60$  度と 90 度においてワイヤグリッドを 45 度ずつ回転させ偏光測定を行った。測定結果を Fig 3 に示す。結果は偏光成分がほとんど P 偏光であることを示している。P 偏光の強度を  $I_p$ 、S 偏光の強度を  $I_s$  としたとき測定結果の強度  $I$  は

$$I = \frac{I_p - I_s}{2} \cos(2\theta_r) + \frac{I_p + I_s}{2} \quad (3)$$

であらわされる。一方、偏光度  $\rho$  は

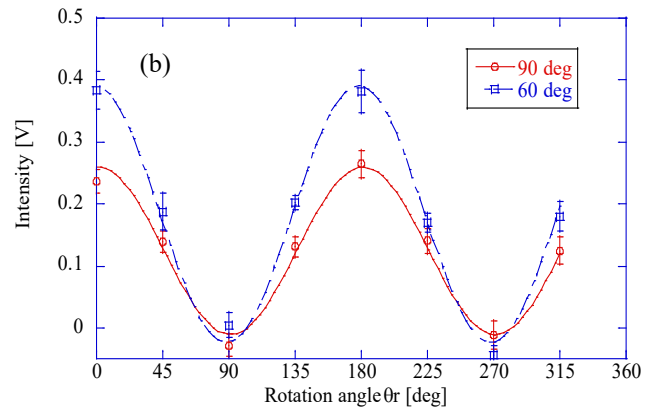
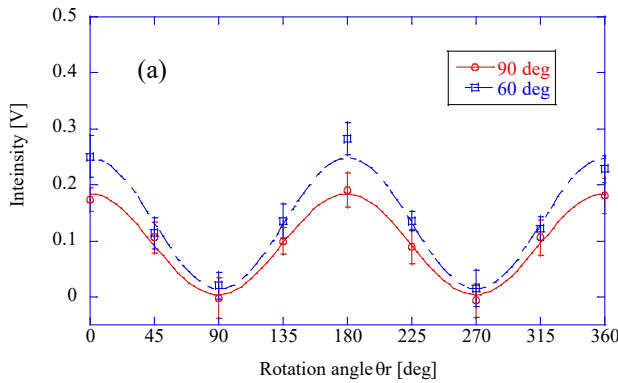


Figure 3: Polarization angle dependence of measured light intensity for blaze angle  $\alpha = 6$  deg (a), and  $\alpha = 12$  deg (b).

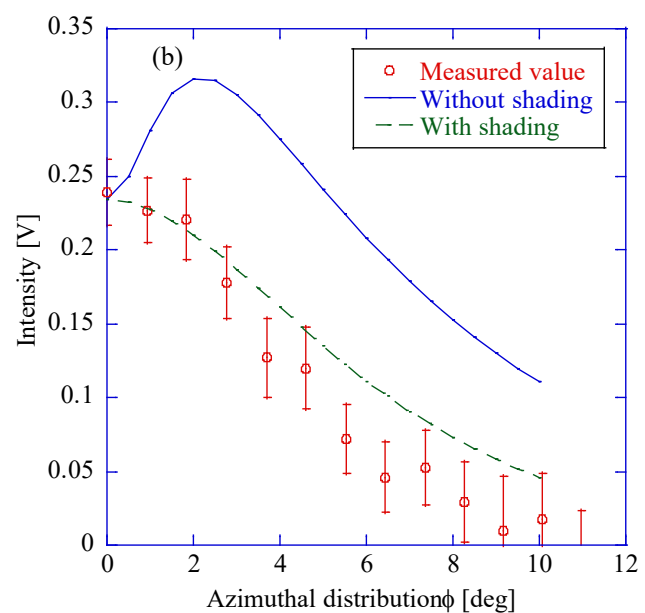
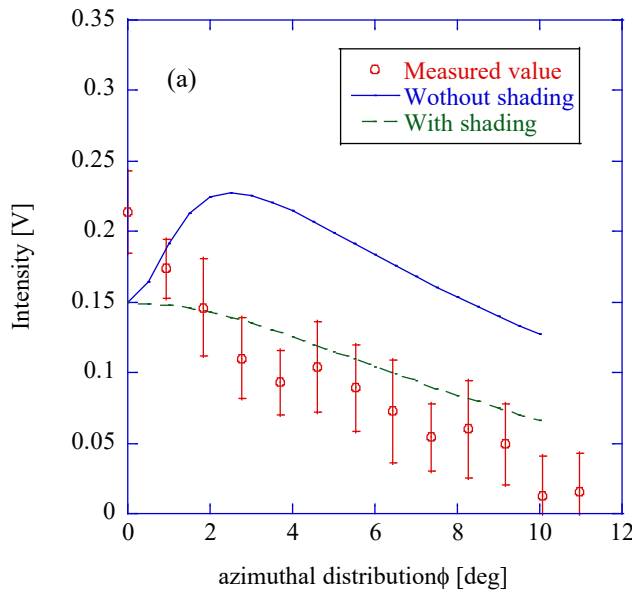


Figure 4: Results of azimuthal distribution at  $\theta = 90$  deg(a),  $\theta = 60$  deg(b).

$$\rho = \frac{I_p - I_s}{I_p + I_s} \quad (4)$$

と定義される。 $\alpha=6$ 度 $\theta=60$ 度の時 $\rho=1.1\pm 0.1$ 、 $\theta=90$ 度の時 $\rho=1.08\pm 0.1$ 、傾斜角 $\alpha=12$ 度、 $\theta=60$ 度の時 $\rho=0.89\pm 0.11$ 、 $\theta=90$ 度の時 $\rho=0.96\pm 0.17$ であった。一方計算では遮蔽効果を考えた場合はいずれの場合もほとんど $\rho=1$ であり、遮蔽効果を考えない場合は約0.75である。測定の結果は遮蔽効果を考えた場合により近い値を示している。

### 3.2 方位角分布測定

$\alpha=6$ 度と $\alpha=12$ 度の回折格子についてそれぞれ $\theta=40$ 度から $90$ 度まで $10$ 度間隔で $\varphi$ 分布の測定を行った。この時幅 $10$ mmのスリットを使用することで $\varphi$ 範囲を約 $\pm 1$ 度に制限した。傾斜角 $6$ 度の回折格子について $60$ 度、 $90$ 度の測定結果と遮蔽効果を考慮した場合と考慮しない場合の計算との比較をFig. 4に示す。いずれの結果も $\varphi=0$ でピークとなることがわかる。この結果は遮蔽効果を考えた場合に近いと考えられる。

### 3.3 観測角度分布測定

それぞれの傾斜角の異なる回折格子でバンチ長を変えながら $\theta=36$ 度から $90$ 度までの範囲について $2$ 度ステップで角度分布測定を行った(Fig. 5)。この時幅 $10$ mmのスリットで $\theta$ 方向に約 $\pm 1$ 度の角度制限を行った。ビーム回折格子距離は $750$   $\mu\text{m}$ であった。

## 4. 計算との比較

測定結果と遮蔽効果を考えた計算及び遮蔽効果を考慮しない場合の計算との比較を行い遮蔽効果の妥当性について考察を行う。ここでは特に観測角分布について考察を行う。

### 4.1 分布形状の比較

遮蔽効果を考慮しない場合と考慮する場合で観測角分布の形状が異なる。これについて測定値と比較した。Figure 5に傾斜角 $\alpha=6$ 度バンチ長 $65\text{fs}$ の条件における測定値及び遮蔽効果を考慮した計算値と遮蔽効果を考慮しない計算値でそれぞれフィッティングを行ったものをそれぞれプロットしたものを示す。フィッティングは計算結果に対する倍率をフリーパラメータとして行った。計算値はそれぞれ1次光から3次光の合計である。遮蔽効果を考慮しない場合は $\theta=40$ 度付近でピークとなるが遮蔽効果を考慮するとピークが $\theta=50$ 度付近でありピークの幅が広がることわかる。これらのフィッティングの決定係数 $R^2$ は遮蔽効果を考えない場合は $-4.0$ 、遮蔽効果を考えた場合は $-0.16$ となった。遮蔽効果を考えない場合はまったく一致しない。一方で遮蔽効果を考えた場合については考えない場合と比較すると差異は小さいが一致しない結果であった。

### 4.2 回折格子傾斜角に対する強度の比較

ここでは傾斜角による強度の差がどの程度遮蔽効果の計算と一致するのか調べた。ここでは $\alpha=6$ 度、 $\theta=60$

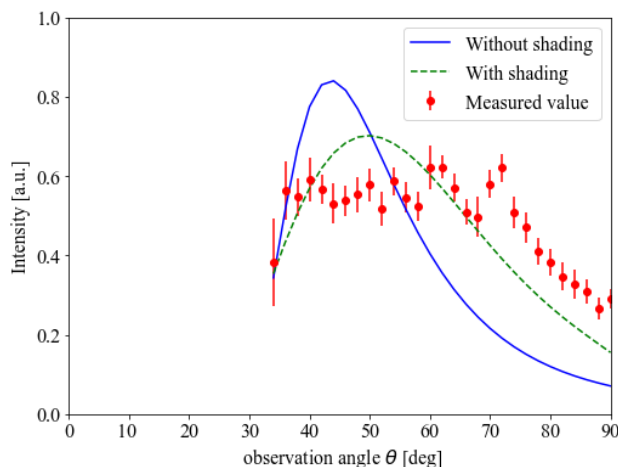


Figure 5: Comparison of measured and calculated values.

度のデータで計算値と測定値それぞれを割ることで比較を行った。 $\alpha=6$ 度と $\alpha=12$ 度の回折格子についてのバンチ長 $65$ fsの計算値と測定値をFig. 6に示す。角度分布の全体において $\alpha=6$ 度の場合より強度が大きいことが確認できた。これは遮蔽効果を考えた場合によく一致する。一方で観測角 $\theta$ が $70$ 度から $90$ 度にかけての範囲の測定値は傾斜角による差が小さく、計算とは完全には一致しない。また計算でははっきりとしたピークを持つ分布となっているが測定値はピーク付近がなだらかな分布となっている。このような違いについて検討が必要である。現在行っている計算は方位角 $\varphi=0$ 面のものであるが、実際の測定では有限の大きさの取得範囲がある。また、 $\varphi$ の定義から同じ $y$ 方向の幅でも $\theta$ 角度が異なる場合は $\varphi$ 範囲が異なる。このようなことを考え、 $\varphi$ 範囲を含めた計算を行い比較する必要がある。また、現在縦方向のバンチ形状はガウシアンを想定しているがガウシアンから形状が変化した場合には形状因子が異なることで角度分布が変化することが考えられる。また高次光についても形状因子の効果でバンチ長が短い時により高次の項が含まれることなどが考えられる。これらについても今後検

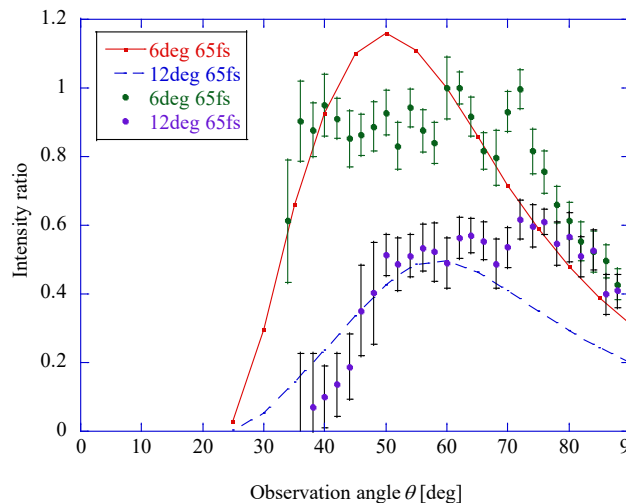


Figure 6: Comparison of calculated and measured values for different blaze angles normalized with data of  $\theta=60$  degrees  $\alpha=6$  degrees.

討を行う予定である。

## 5. まとめ

CSPR の表面電流モデルによる計算における遮蔽効果について計算と測定の比較を行った。偏光成分や方位角分布の結果は遮蔽効果を考慮した計算とよく一致した。また角度分布については傾斜角が浅い回折格子がより強度が大きいという結果が得られ、これは遮蔽効果を考慮した計算の傾向と一致する。これらのことから遮蔽効果を考慮することでより測定と近い計算結果が得られるようになった。しかし計算による観測角分布と測定で得られた観測角分布の詳細な形状には差異がある。現在行っている3次元数値計算では基本的に観測角分布について方位角 $\varphi=0$ の条件で考えているが、アクセプタンスを考慮した場合について詳細な検討を行う予定である。また、バンチ形状や高次光の扱いについても検討を進める。

## 参考文献

- [1] I. V. Konoplev *et al.*, “Single shot, nondestructive monitor for longitudinal subpicosecond bunch profile measurements with femtosecond resolution” *Phys. Rev. Accel. Beams* 2021, 24, 022801.
- [2] H.L. Andrews *et al.*, “Reconstruction of the time profile of 20.35 GeV, subpicosecond long electron bunches by means of coherent Smith-Purcell radiation”. *Phys. Rev. STAB* 2014, 17, 052802.
- [3] J. H. Brownell and G. Doucas, “Role of the grating profile in Smith-Purcell radiation at high energies” *Phys. Rev. STAB*. 8, 091301 (2005).
- [4] H. Yamada *et al.*, “Study of Coherent Smith-Purcell Radiation in the Terahertz Region Using Ultra-Short Electron Bunches” *Particles* 2023, 6(3), 693-702.
- [5] H. Yamada *et al.*, “3次元数値計算を用いたスミス＝パーセル放射における表面電流モデルの評価”, *Proceedings of the 20th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan*, August 29 - September 1, 2023, Funabashi.