

# 一様磁場と自己電場により駆動される単粒子軌道の初速度に対する依存性

## INITIAL VELOCITY DEPENDENCE OF SINGLE PARTICLE TRAJECTORY DRIVEN BY UNIFORM MAGNETIC FIELD AND SELF-ELECTRIC FIELD

山本英億<sup>#, A)</sup>, 朴英樹<sup>B)</sup>, 曾我之泰<sup>C)</sup>, 高橋一匡<sup>A)</sup>, 佐々木徹<sup>A)</sup>, 菊池崇志<sup>A)</sup>

Hideyasu Yamamoto<sup>#, A)</sup>, Youngsoo Park<sup>B)</sup>, Yukihiko Soga<sup>C)</sup>, Kazumasa Takahashi<sup>A)</sup>, Toru Sasaki<sup>A)</sup>, Takashi Kikuchi<sup>A)</sup>

<sup>A)</sup> Nagaoka University of Technology

<sup>B)</sup> NIT, Anan College

<sup>C)</sup> Kanazawa University

### Abstract

A charged particle in a space with a uniform magnetic field experiences a Lorentz force in a perpendicular direction to both the particle velocity and the magnetic field, and undergoes cyclotron motion with the Larmor radius. In a space where a magnetic field and an electric field exist, a drift motion occurs in which the guiding center moves perpendicular to the magnetic field during cyclotron motion. The Larmor radius depends not only on the strength of the electric and magnetic fields but also on the initial velocity of the charged particle, and there exist conditions under which the Lorentz force balances with other forces. In the case of an external magnetic field in the z-axis direction and an electric field due to a uniform charge distribution in a cylindrical coordinate system, the charged particle drifts around the center of the uniform charge while undergoing cyclotron motion in a perpendicular plane to the z-axis direction. In this case, the conditions under which motion with a Larmor radius of 0 occurs were analytically derived, and the particle trajectory was confirmed by numerical analysis. In addition, the possible trajectories of the cyclotron motion of a charged particle were compared when the initial velocity is changed, and the differences were investigated.

## 1. はじめに

重イオン慣性核融合[1, 2]などで必要とされる大電流ビームは、空間電荷効果によって非線形な挙動を示し、質の劣化を引き起こす。このため、Malmberg-Penning trap のように、軸方向に一様な磁場をかけて電子を閉じ込めた非中性プラズマを用いて荷電粒子の挙動を検討することが行われている。[3, 4]

荷電粒子は一様磁場の空間内で、粒子の速度にも磁場にも垂直な方向にローレンツ力を受け、ラーマー半径でサイクロトロン運動する。磁場に加え電場が存在する空間内では、サイクロトロン運動しながら案内中心が磁場に対して垂直に移動するドリフト運動が起こる。ラーマー半径は電場と磁場の強さだけでなく、荷電粒子の初速度によっても変化し、ローレンツ力が他の力と釣り合う条件が存在する。

本研究では、粒子の進行方向に垂直な平面内で起こるサイクロトロン運動の遠心力、ローレンツ力、クーロン力が釣り合う条件を示し、粒子軌道の取りうる範囲が初速度によってどのように変化するか調べることを目的とした。

## 2. 解析条件および解析・計算方法

### 2.1 解析モデル

Figure 1 のように、z 方向に一様に磁束密度  $B_z$  が存在する 3 次元空間の  $xy$  平面に、半径  $R$  の太さを持つ円柱状に電荷が分布している状態を考える。これは粒子ビームの進行方向が z 軸方向で、 $R$  がビーム半径を表すモデ

<sup>#</sup> s235046@stn.nagaokaut.ac.jp

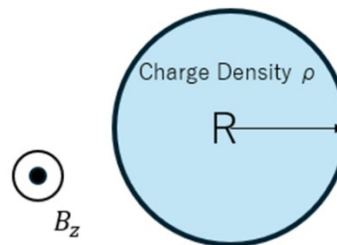


Figure 1: Calculation model.

ルとできる。

電荷密度  $\rho$  が一定とすると、半径方向に生じる自己電場  $E_r$  はビーム半径  $R$  の内側ではビームの中心からの距離  $r$  に比例する。空間の誘電率を  $\epsilon$  とすると

$$E_r = \frac{r\rho}{2\epsilon} \quad (r < R) \quad (1)$$

となる。また、次式の通り、ビーム半径  $R$  の外側では自己電場  $E_r$  は  $r$  に反比例する。

$$E_r = \frac{R^2\rho}{2\epsilon r} \quad (r > R) \quad (2)$$

以上の電場  $E_r$  と磁束密度  $B_z$  を用いて  $xy$  平面での粒子軌道は、サイクロトロン運動とドリフト運動の結合となり、次の運動方程式で表される。

$$m\dot{v}_x = qB_z v_y + qE_r \frac{x}{r} \quad (3)$$

$$m\dot{v}_y = -qB_z v_x + qE_r \frac{y}{r} \quad (4)$$

ここで、 $m$  は粒子の質量、 $q$  は荷電粒子の電荷、 $v_x$  と  $v_y$  はそれぞれ  $x$  方向と  $y$  方向の粒子の速度を示す。

## 2.2 半径方向の力が釣り合う条件の導出

前節で定義した解析条件において、サイクロトロン運動の遠心力、ローレンツ力、クーロン力が釣り合う条件を導出する。

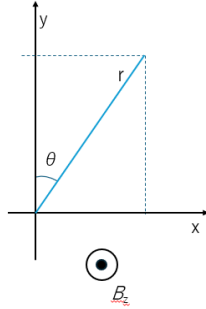


Figure 2: Coordinate system for analysis.

時計回りを正とする Fig. 2 のような円筒座標系では、 $r$  方向と  $\theta$  方向の運動方程式は次の2つの式で表される。

$$\begin{aligned} F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -qB_z v_\theta + qE_r \\ &= -qB_z r\dot{\theta} + qE_r \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F_\theta &= m \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = qB_z v_r \\ &= qB_z \dot{r} \end{aligned} \quad (6)$$

遠心力、ローレンツ力、クーロン力が釣り合うならば、 $r$  が一定であるため  $\dot{r}=0$  となる。よって運動方程式は次の2式となり、 $r$  方向の運動方程式は  $\dot{\theta}$  の2次関数となる。

$$-mr\dot{\theta}^2 = -qB_z r\dot{\theta} + qE_r \quad (7)$$

$$mr\ddot{\theta} = qB_z \dot{r} = 0 \quad (8)$$

解の公式を用いることで、遠心力、ローレンツ力、クーロン力が釣り合うための  $\dot{\theta}$  の条件が求まる。

$$\dot{\theta} = \frac{qB_z r \pm \sqrt{(-qB_z r)^2 - 4mrqE_r}}{2mr} \quad (9)$$

2次関数の解のため、 $\dot{\theta}$  の2つの解をそれぞれ  $\dot{\theta}_-$ 、 $\dot{\theta}_+$  と定義する。

$$\dot{\theta}_- = \frac{qB_z r - \sqrt{(qB_z r)^2 - 4mrqE_r}}{2mr} \quad (10)$$

$$\dot{\theta}_+ = \frac{qB_z r + \sqrt{(qB_z r)^2 - 4mrqE_r}}{2mr} \quad (11)$$

また、重解を  $\dot{\theta}_=$  と定義する。

$$\dot{\theta}_= = \frac{qB_z r}{2mr} \quad (12)$$

## 2.3 粒子軌道の数値解析方法

粒子の初期位置(半径) $r$ を $r_0$ として、Eq. (9)の条件を満たす粒子の軌道を基準にし、初速度を変更した粒子軌道を数値解析する。粒子シミュレーションのための離散化には Buneman スキーム[5]を用いた。また、粒子の電荷  $q$  を1、質量  $m$  を1と規格化して計算を行った。

## 3. 計算結果

### 3.1 ビーム径の内側( $r \leq R$ )での粒子の軌道

$z$  方向の磁束密度  $B_z$  を4、 $r$  方向の電場  $E_r$  を  $2r$  とし、粒子の初期条件を  $x=0$ 、 $y=1$ 、 $V_x=a(r\dot{\theta})$ 、 $V_y=0$  (つまり、 $r$  方向の初速度を0とし、 $\theta$  方向の初速度を Eq. (9)の条件から  $a$  倍した速度)と与えて計算を行った。Figure 3 に  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_-$ 、Fig. 4 に  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_+$ 、Fig. 5 に  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_=$  の場合の粒子軌道をそれぞれ示す。

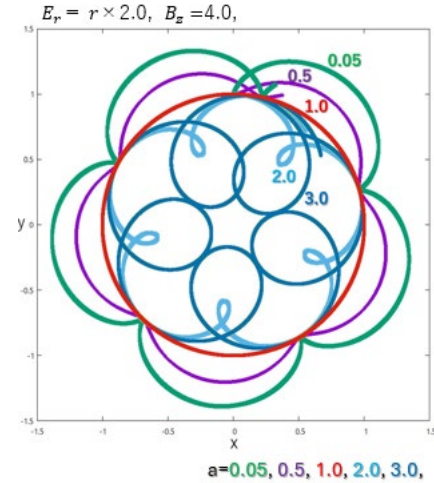


Figure 3: Particle orbit for  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_-$  ( $r \leq R$ ).

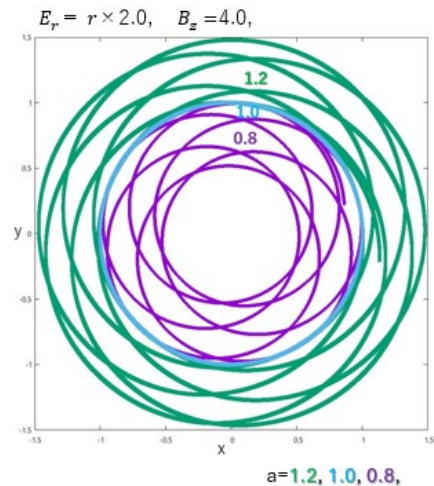


Figure 4: Particle orbit for  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_+$  ( $r \leq R$ ).

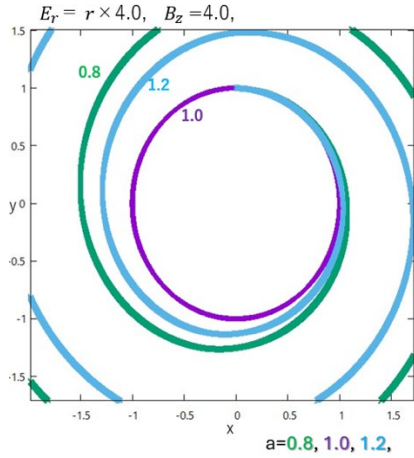


Figure 5: Particle orbit for  $\hat{\theta} = \hat{\theta}_-$  ( $r \leq R$ ).

Figure 3 は速度 $r\hat{\theta}_-$ を基準として、初速度を 0.05 倍、0.5 倍、2.0 倍、3.0 倍した軌道と比較した。 $r\hat{\theta}_-$ より遅い場合の軌道は外側に広がり、速い場合の軌道は内側に狭まった。

逆に、Fig. 4 に示した通り、速度 $r\hat{\theta}_+$ の 0.8 倍、1.2 倍の初速度を与えた結果は、 $r\hat{\theta}_+$ より速い場合の軌道は外側に広がり、遅い場合の軌道は内側に狭まった。

Figure 5 に示す $\hat{\theta} = \hat{\theta}_-$ の場合は、Eq. (12)の条件を満たす粒子のみが安定した軌道となり、それ以外の初速度の粒子は時間とともに $r$ が増加し続けるという結果となった。

### 3.2 ビーム径の外側( $r > R$ )での粒子の軌道

次に、ビーム径の外側での粒子軌道の計算結果を Figs. 6~8 に示す。Figure 6 と Fig. 7 は  $z$  方向の磁束密度  $B_z$  を 4、 $r$  方向の電場  $E_r$  を  $2/r$  として計算し、Fig. 8 は磁束密度  $B_z$  を 2、 $r$  方向の電場  $E_r$  を  $4/r$  で計算した結果を示す。粒子の初期条件は  $x=0$ 、 $y=2.0$ 、 $V_x = a(r\hat{\theta})$ 、 $V_y=0$  である。初速度を Eq. (9)の条件から  $a$  倍した速度として計算を行い比較した。

Figure 6 は $r\hat{\theta}_-$ を 0.25 倍、0.5 倍、5.0 倍、10.0 倍した初速度を与えた粒子軌道と比較した結果を示す。 $r\hat{\theta}_-$ より遅い初速度の粒子軌道は外側に広がり、速い場合の軌道は内側に狭まった。

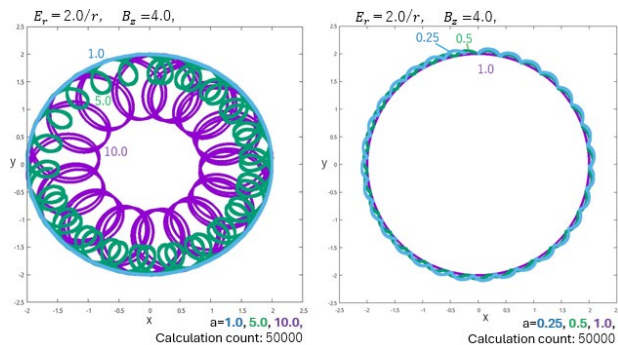


Figure 6: Particle orbit for  $\hat{\theta} = \hat{\theta}_-$  ( $r > R$ ).

Figure 7 は $r\hat{\theta}_+$ を 0.6 倍、0.8 倍、1.2 倍、1.4 倍した初速度を与えた粒子軌道と比較した結果を示す。 $r\hat{\theta}_+$ より速い初速度の粒子軌道は外側に広がり、遅い場合の粒

子軌道は内側に狭まった。

Figure 8 は $r\hat{\theta}_-$ を 0.25 倍、0.5 倍、1.5 倍、2.0 倍、2.5 倍した初速度を与えた粒子軌道では、ビーム径内側での粒子軌道とは異なり、発散はせずに基準となる初速度  $r\hat{\theta}_-$ での粒子軌道の外側を周回するという結果となった。

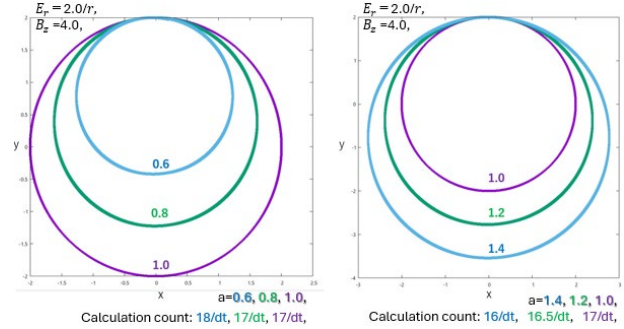


Figure 7: Particle orbit for  $\hat{\theta} = \hat{\theta}_+$  ( $r > R$ ).

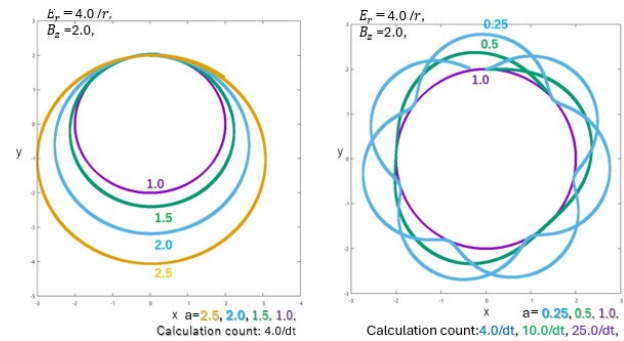


Figure 8: Particle orbit for  $\hat{\theta} = \hat{\theta}_-$  ( $r > R$ ).

## 4. まとめ

本研究では、粒子の進行方向に垂直な平面内で起こるサイクロトロン運動の遠心力、ローレンツ力、クーロン力が釣り合う条件を示し、粒子軌道の取りうる範囲が初速度によってどのように変化するか調査した。

Table 1: Dependence of Particle Trajectory on Initial Velocity  $a(r\hat{\theta})$

力が釣り合う初速度の解	$(r \leq R)$		$(r > R)$	
	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
$\hat{\theta} = \hat{\theta}_-$	$r_0 \geq r$	$r_0 \leq r$	$r_0 \geq r$	$r_0 \leq r$
$\hat{\theta} = \hat{\theta}_+$	$r_0 \leq r$	$r_0 \geq r$	$r_0 \leq r$	$r_0 \geq r$
$\hat{\theta} = \hat{\theta}_=$	$r$ が発散	$r$ が発散	$r_0 \leq r$	$r_0 \leq r$

得られた結果を Table 1 にまとめた。この結果から、一様磁場によって閉じ込められる荷電粒子の軌道は、磁束密度および自己電場の強さと、粒子の初速度の条件から、 $r$ 方向の力が釣り合っている軌道を境界として分類できることがわかった。

## 参考文献

- [1] K. Horioka, “Progress in particle-beam-driven inertial fusion research: Activities in Japan”, *Matter Radiat. Extremes*, vol. 3, pp. 12-27, 2018.
- [2] K. Takayama *et al.*, “A massive-ion beam driver for high-energy-density physics and future inertial fusion”, *Phys. Lett. A*, vol. 384, 126692, 2020.
- [3] Y. Park *et al.*, “A single-shot method for measuring the energy spectra of pure electron plasmas driven by  $E \times B$  rotation”, *Plasma Fusion Res.*, vol. 14, 1201046, 2019.
- [4] Y. Soga *et al.*, “Parallel energy analysis of a pure electron plasma with a drifting Maxwellian distribution”, *J. Phys. Soc. Jpn.*, vol. 92, 104501, 2023.
- [5] A. B. Langdon and B. F. Lasinski, “Electromagnetic and relativistic plasma simulation models”, *Methods Comput. Phys.: Adv. Res. Appl.*, vol. 16, pp. 327-366, 1976.