

PF リングにおける static Robinson instability のスタディ

STUDY ON THE STATIC ROBINSON INSTABILITY AT THE PF STORAGE RING

山口孝明^{*A)}、坂中章悟^{A, B)}、山本尚人^{A, B)}

Takaaki Yamaguchi^{*A)}, Shogo Sakanaka^{A, B)}, Naoto Yamamoto^{A, B)}

^{A)}Dept. of Accelerator Science, The Graduate University for Advanced Studies (SOKENDAI)

^{B)}High Energy Accelerator Research Organization (KEK)

Abstract

When the beam with high current circulates in a storage ring, the static Robinson instability occurs and the coherent synchrotron oscillation becomes unstable. This phenomenon is important in the storage rings with high beam loading such as future synchrotron light sources. To enrich our understanding on this phenomenon, we conducted a study on the static Robinson instability in the PF storage ring. We measured the shift in the coherent synchrotron frequency as the beam current. We also tried to observe whether a beam dump happens under the conditions (beam current and voltage) which is expected from the theory. We report these experimental results, and compare them with analytical calculations.

1. はじめに

蓄積リングにおいて大電流のビームを蓄積すると、コヒーレントなシンクロトロン振動数が低電流のときに比べ低下する。これは beam loading の理論から次のように説明できる。加速空洞内の空洞電圧は、外部の RF 源が励起する電圧と蓄積ビームが誘起する電圧の重ね合わせである。ビーム負荷が大きいとビームが誘起する電圧が大きくなるが、ビーム誘起電圧はコヒーレントなシンクロトロン振動の復元力として働かない。このため、ビーム電流が大きくなるにつれ復元力が弱まり、コヒーレントなシンクロトロン振動数が低下する。そして、振動数がほぼ 0 になるときにビームのコヒーレントな振動が不安定となる。この不安定性は static Robinson instability [1-3] として知られている。

コヒーレントなシンクロトロン振動の観測例としては、Towne らが National Synchrotron Light Source vuv ring で単一バンチのダイポール振動の観測を行っており、ダイポール振動には通常のシンクロトロン振動数で振動するモードに加え、空洞の加速モードに起因する振動モードも存在することを論じている [4]。

Static Robinson instability は、ビーム負荷が高い次世代放射光源などにおいて、考慮すべき重要な問題の 1 つと考えられる。この現象への理解を深めるため、我々は Photon Factory (PF) 2.5 GeV リングにおいて次のスタディを行った:

- コヒーレントなシンクロトロン振動数をビーム電流を変えながら測定
- Static Robinson instability が発生しやすい、大電流かつ低空洞電圧の条件において、static Robinson instability によるビームダンプが発生するかの確認

本論文では、第 2 節で static Robinson instability の

導入と、コヒーレントなシンクロトロン振動数及び減衰率の数値計算結果について述べる。第 3 節では、PF リングで行ったコヒーレントなシンクロトロン振動数の測定及び、static Robinson instability によると思われるビームダンプの発生について報告する。第 4 節では、これらの測定結果と理論予測の比較検討を行う。第 5 節で本スタディの結果をまとめ、今後の展望について述べる。

2. STATIC ROBINSON INSTABILITY

2.1 コヒーレントなシンクロトロン振動数の計算と Robinson の安定条件

蓄積リングにおいて、全ての RF バケットに一様に電子ビームを蓄積したとする。全てのバンチが位相を揃えて振動している状況を考え、そのコヒーレントなシンクロトロン振動の時間依存性を $\exp(-i\Omega_0 t)$ と表す。ビームと相互作用するリングの結合インピーダンスとしては、空洞の加速モードの結合インピーダンスのみ考慮する。このとき、コヒーレントなシンクロトロン振動数 $\Omega_0 = ip$ は次の 4 次方程式の解で与えられる (補遺を参照):

$$p^4 + 2\alpha_f p^3 + \{(1 + \tan^2 \psi)\alpha_f^2 + \omega_{s0}^2\} p^2 + 2\alpha_f \omega_{s0}^2 p + \alpha_f^2 \omega_{s0}^2 \left(1 + \tan^2 \psi + \frac{V_{br} \tan \psi}{V_c \sin \phi_s}\right) = 0 \quad (1)$$

ここで、各パラメータの定義を Table 1 に示す。また、PF リングにおけるパラメータを Table 2 に示す。

Equation (1) において、Routh-Hurwitz の判定法 [5] を適用すると、振動が安定な (全ての解の実数部が負となる) 条件は次のようになる。

$$\tan \psi < 0, \quad 1 + \tan^2 \psi + \frac{V_{br} \tan \psi}{V_c \sin \phi_s} < 0 \quad (2)$$

また、 $\tan \psi < 0$ を仮定すると、

$$\frac{V_{br}}{V_c} \sin 2\psi + 2 \sin \phi_s > 0 \quad (3)$$

* yamaguc@post.kek.jp

となり、これは Robinson の安定条件として知られている [3]。

Table 1: Definition of the Parameters

Symbol	Explanation
\bar{I}	Average beam current
ω_{res}	Resonant frequency of the cavity
$V_{\text{br}} = \frac{R_{\text{sh}}\bar{I}}{1+\beta}$	Beam-induced voltage at resonance
$\phi_s = \arccos \frac{U_0}{eV_c}$	Synchronous phase
$\alpha_f = \frac{\omega_{\text{res}}}{2Q_L}$	Damping rate of the cavity
$\psi = \arctan \left(2Q_L \frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{res}}} \right)$	Tuning angle
$\Delta\omega = \omega_{\text{res}} - \omega_{\text{rf}}$	Detune of the cavity
$\omega_{s0} = \sqrt{\frac{eV_c\alpha_c\omega_{\text{rf}}\sin\phi_s}{E_0T_0}}$	Unperturbed synchrotron frequency
T_0	Revolution time
$Q_L = \frac{Q_0}{1+\beta}$	Loaded Q factor

Table 2: Principal Parameters of the PF Storage Ring

Paramter	Symbol	value
RF frequency	ω_{rf}	$2\pi \times 500.106459$ MHz
Beam energy	E_0	2.5 GeV
Momentum compaction factor	α_c	0.0064
Harmonic number	h	312
Cavity voltage	V_c	0.425 MV/cav. $\times 4$
Shunt impedance	R_{sh}	6.8 M Ω /cav. $\times 4$
Radiation loss per turn*	U_0	428 keV
Coupling constant of the cavity	β	2.3
Unloaded Q value	Q_0	3.9×10^4

* The radiation loss per turn U_0 includes the contributions from bending magnets and insertion devices under the present experiment.

2.2 4次方程式の解の数値計算結果

4次方程式 (1) の数値計算結果を Fig. 1 に示す。数値計算における加速器のパラメータとしては Table 2 の値を使用した。また空洞の同調角は optimum tuning [3] に制御されていると仮定した、即ち、 $\tan\psi = -V_{\text{br}}\sin\phi_s/V_c$ と仮定した。Figure 1 において、解の実数部がコヒーレントなシンクロトロン振動の減衰率、虚数部が振動数を示す。また、実数部が正のとき、振動振幅が増加し、負のとき減少する。

ビーム信号の周波数スペクトルを観測した場合、減衰率の絶対値が小さい方の振動数が、鋭いピークを持った RF 周波数のサイドバンドとして現れるはずである。

Equation (3) から、optimum tuning での閾電流

$$I_{\text{th}} = \frac{(1+\beta)V_c}{R_{\text{sh}}\cos\phi_s} \quad (4)$$

を超えると、実数部が正の解が現れ、振動振幅が増加し不安定になることがわかる。これが static Robinson instability である。Table 2 のパラメータを用いた場合には、その閾電流は 819 mA となる。

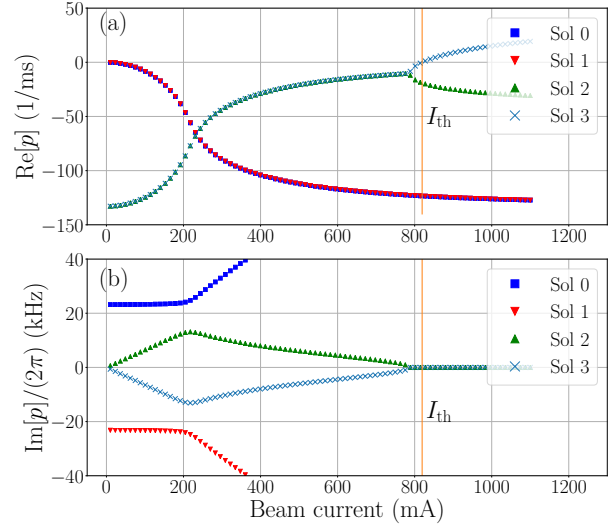


Figure 1: Roots of the quartic equation (1) as a function of the beam current. (a) The real parts of the roots that describe the growth rates of the coherent synchrotron oscillation. (b) The imaginary parts of the roots that describe the frequencies of the coherent synchrotron oscillation.

3. PF リングにおけるビームスタディ

3.1 コヒーレントなシンクロトロン振動数の測定

PF リングでマルチバンチのビームを蓄積し、RF 電圧に位相変調をかけてコヒーレントなシンクロトロン振動を励起した。このときのボタン電極 (BPM) からの信号の RF 周波数周辺におけるスペクトルを測定した。コヒーレントなシンクロトロン振動数は、RF 周波数のサイドバンドとしてスペクトルに現れる。

Figure 2 に測定機器の配置図を示す。スペクトラムアナライザ (ADVANTEST U3771) の tracking generator (TG) から $f_{\text{rf}} + f_{\text{sweep}}$ の信号を出力させた。ここで、 $f_{\text{rf}} = 500.106459$ MHz は RF 周波数、 f_{sweep} は TG でスweepさせる周波数を示す。本測定では RF 周波数の周りを ± 25 kHz または ± 50 kHz でスweepさせた。そして、ミキサーとローパスフィルタを用いて生成した f_{sweep} の信号を RF ステーションの前段の移相器に入力した。この信号によって、RF の位相変調を行い、コヒーレントなシンクロトロン振動を励起させた。同時に、BPM の信号をスペクトラムアナライザに入力し、 f_{rf} のサイドバンドの周波数を測定することで、コヒーレントなシンクロトロン振動数を測定した。

測定時は、PF リングに 250 バunch のバunch トレインを 1 つ蓄積した。加速空洞は 4 台全てを使用し、合計空洞電圧を 1.7 MV に設定した。測定時の位相変調の大きさは 0.256° p-p であった。ビーム電流は 50 mA から 450 mA まで 50 mA ごとにスペクトルを取得した。測定時は大電流での縦方向 coupled-bunch instability の発生を抑えるため、縦方向 bunch-by-bunch feedback を作動させた。電流値が 10 mA のときに、bunch-by-bunch feedback を作動させなかった場合のスペクトルと作動させた場合のスペクトルを比較したところ、ほとんど変化はなかった。

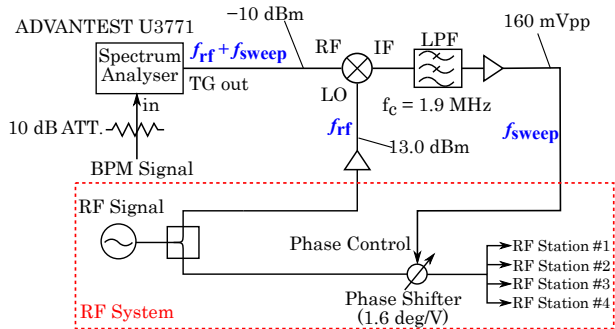


Figure 2: Schematic of the measurement system.

3.2 測定結果

測定された BPM 信号のスペクトルの例を Fig. 3 に示す。ビーム電流を上げていくに従って、コヒーレントなシンクロトロン振動を示すピークの周波数が下がっていくことがわかる。また、比較的低電流のときはサイドバンドは鋭いピークになっているが、200 mA から 300 mA では、サイドバンドの幅が広がった。そして、400 mA 付近から再びピークが鋭くなっていった。

3.3 Static Robinson instability の発生の実験

PF リングで大電流 (約 420 mA) のビーム電流を蓄積した状態で、空洞電圧を 1.7 MV から下げてゆき、static Robinson instability によるビームダンプが発生するかを確かめた。その結果、ビーム電流 404 mA、空洞電圧 1.23 MV のときにビームダンプが発生した。

4. 考察

Figure 4 はコヒーレントなシンクロトロン振動数をビーム電流に対して示した図である。Figure 4(b) の赤色及び橙色 (それぞれ RF 周波数の高周波側及び低周波側から得られた振動数) が測定結果を示す。Figure 4(a), (b) の他の点は、Fig. 1 に示した計算結果を再掲したものである。2 節の計算では、全ての RF バケットにビームを一樣に蓄積すると仮定していたが、実際の測定ではバunchギャップがあった。バunchギャップがあると空洞電圧に過渡的な変化が生じるが、その影響は小さいと考えられるため、バunchギャップがないと仮定した計算結果と比較する。

ビーム電流が 50 mA から 150 mA の領域と 350 mA

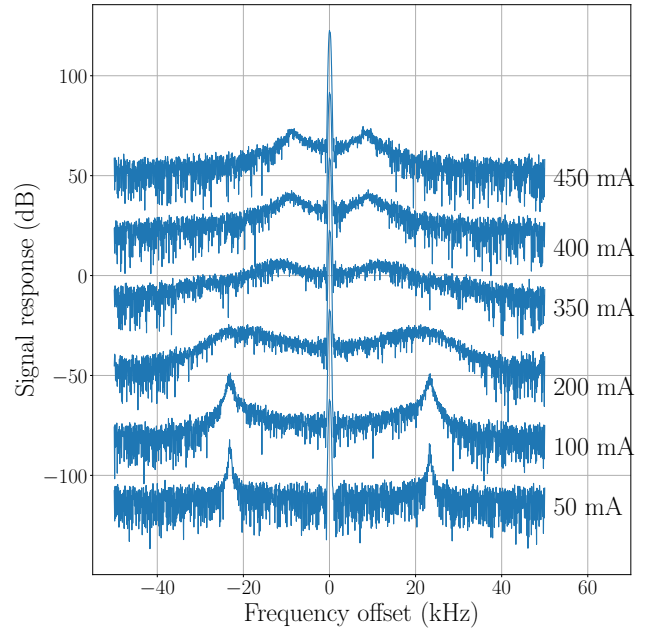


Figure 3: Spectra of the BPM signal as a function of frequency offset from the RF frequency (=500.106 459 MHz). The total cavity voltage is set at 1.7 MV. The trace for the beam current of 50 mA indicates the raw data. The other traces were vertically shifted by +30 dB from the lower one in order to separate the traces.

から 450 mA までの領域では、振動数の測定値は理論計算と概ね一致した。一方 230 mA 付近では、Eq. (1) の計算の結果、2 つの振動数の減衰率が等しくなる。このことから、両方の振動数がスペクトルの形成に寄与すると考えられる。BPM 信号のスペクトルの測定結果では、230 mA 付近でのスペクトルのサイドバンドが広くなり、ピーク周波数は 2 つのシンクロトロン振動数の中間辺りと測定された。これは計算で予測された 2 つのコヒーレント振動数のピークが重なって観測されたためと推測される。2 つの振動数の減衰率が一致する点に関しては、参考文献 [4] で詳しく議論されている。

低ビーム電流 (50 mA) のとき、シンクロトロン振動数の測定値は約 23.2 kHz であった。一方、Table 1 の ω_{s0} の理論式で計算されるシンクロトロン振動数は、 $V_c = 1.7$ MV の場合、23.18 kHz となる。よって、低電流でのシンクロトロン振動数の測定値は理論値と良く合致することがわかった。そのため、実験時のパラメータ (momentum compaction factor, cavity voltage) は、Table 2 で示した値とほぼ合っていると考えられる。

Static Robinson instability の検証実験では、空洞電圧が 1.23 MV、ビーム電流が 404 mA のときビームダンプが発生した。一方、Eq. (4) より $V_c = 1.23$ MV のときの閾電流は $I_{th} = 426$ mA と計算される。閾電流の測定値と計算値の差異は約 5% であり、よく一致する結果を得た。このため、実験時に発生したビームダンプは static Robinson instability によるものと推

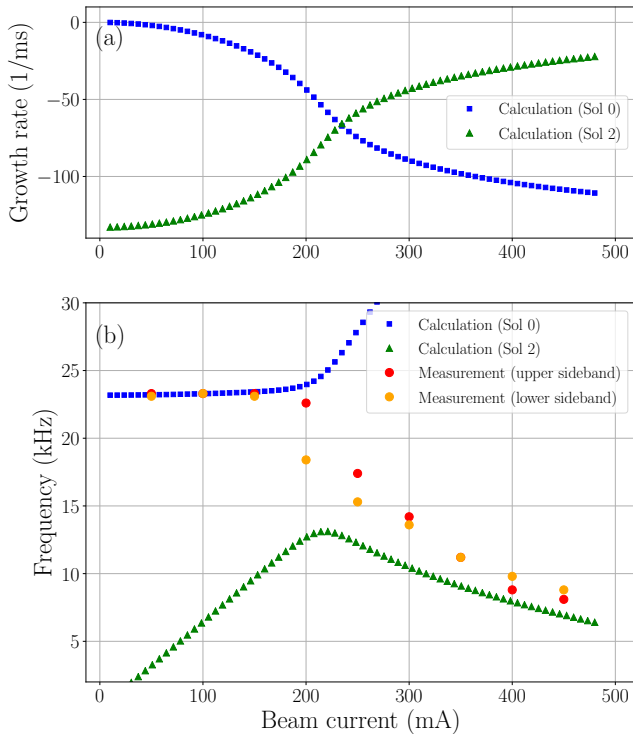


Figure 4: (a) Growth rate of the coherent synchrotron oscillation calculated from Eq. (1). (b) Coherent synchrotron frequency calculated from Eq. (1) and the sideband frequencies measured from the BPM spectra.

測される。但し、今回の実験ではこの1例しかビームダンプを検証していないため、確実な結論を得るためには追加の実験が必要だと考えられる。

5. まとめ

本スタディでは PF リングで、通常運転時と同じ空洞電圧 1.7 MV において、コヒーレントなシンクロトロン振動数のビーム電流依存性を BPM 信号のサイドバンドの振動数から測定した。また、大ビーム電流を蓄積時に空洞電圧を降下させ、static Robinson instability によるビームダンプが発生するかを確かめた。最後に、シンクロトロン振動数や閾電流の測定値と理論計算による計算値との比較検討を行った。

まずシンクロトロン振動数の測定では、電流値が 50 mA から 150 mA の低電流領域及び、350 mA から 450 mA の大電流領域では、シンクロトロン振動数の測定値は、理論計算と概ね一致することがわかった。電流値が 230 mA 付近の中間の電流域では、理論的に予測される 2 つの振動数のピークが重なった結果、サイドバンドが広くなり、ピークが 2 つのシンクロトロン振動数の間に来ていると解釈される。

次に、ビームダンプが発生した電流値は、static Robinson instability における閾電流の計算値とほぼ一致する結果を得た。そのため、今回観測されたビームダンプは static Robinson instability によるものであると推測され、概ね理論的な予測通りに static Robinson instability が発生したのではないかと考えられる。但

し今回のスタディでは、ビームダンプの観測は 1 回のみであるため、今後様々な条件で再度ビームダンプの観測を行い、static Robinson instability によるビームダンプであるかを確認する予定である。

参考文献

- [1] K. W. Robinson, Cambridge Electron Accelerator Report CEAL-1010 (1964).
- [2] 赤井和憲, RF システム, 高エネルギー加速器セミナー OHO'94 (1994), p. II-32.
- [3] P. B. Wilson and J. E. Griffin, AIP Conference Proceedings, 87, 450 (1982).
- [4] N. Towne and J.-M. Wang, Phys. Rev. E, 57, 3461 (1998).
- [5] See, for example, H. Klingbeil, *et al.*, Theoretical Foundations of Synchrotron and Storage Ring RF Systems, (Springer, Switzerland, 2015), p. 345.

補遺: コヒーレントなシンクロトロン振動数に関する 4 次方程式の導出

Equation(1) の 4 次方程式の導出を行う。導出では、参考文献 [2] の議論を参考にした。計算では簡単のため、全ての RF バケットに一律に電子ビームが蓄積されているとし、各バンチを点電荷で近似する。また、空洞の加速モードの結合インピーダンスのみ考慮する。ここでは、粒子の進行方向の位相空間の座標として同期粒子のエネルギー E_0 からのずれ $\delta_{m,n} = (E_{m,n} - E_0)/E_0$ 及び平衡位相からの時間のずれ $\tilde{t}_{m,n}$ を選ぶ。ここで、 $m = 0, 1, 2, \dots, h-1$ はバンチの番号、 $n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$ は粒子が蓄積リングを周回した回数を表す。このとき、 m 番目のバンチが n 周目に加速空洞を通過する時刻は

$$T_{m,n} = nT_0 + \frac{m}{h}T_0 - \tilde{\tau} - \tilde{t}_{m,n} \quad (5)$$

と書ける。ここで、 T_0 は同期粒子の周回時間、 $-\omega_{\text{rf}}\tilde{\tau}$ はバンチの generator 電圧に対する平衡位相を示す。後の計算でわかるように各バンチは平衡位相を中心にシンクロトロン振動を行う。

周回当たりの $\delta_{m,n}$ 及び $\tilde{t}_{m,n}$ の変化は

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{m,n+1} - \delta_{m,n}}{T_0} &= \frac{1}{E_0 T_0} [eV_g \cos(\omega_{\text{rf}} T_{m,n}) - U_0 + eV_s(T_{m,n})] \\ \frac{\tilde{t}_{m,n+1} - \tilde{t}_{m,n}}{T_0} &= -\alpha_c \delta_{m,n} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ここで、 V_g は外部からの RF 入力により空洞に励起される generator 電圧の振幅である。一方、 $V_s(t)$ はビームが励起する電圧であり、縦方向 wake function $W_{\parallel}(z)$ を用いると、

$$V_s(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} W_{\parallel}(c(t-t'))I(t')dt' \quad (7)$$

と書ける (wake function は正電荷の粒子を減速する方向を正としている)。バンチを点電荷で近似する

と、瞬時電圧 $I(t)$ は

$$I(t) = eN \sum_{m'=0}^{h-1} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \delta(t - T_{m',n'}) \quad (8)$$

と書ける。ここで、 N はバンチ当たりの粒子数である。粒子の縦方向の振動周期は一般的に T_0 に比べ十分に長いため、Eq. (6) の漸化式は $t = nT_0$ において時間 t に関する連続的な微分方程式で近似できる。よって、

$$\frac{\delta_{m,n+1} - \delta_{m,n}}{T_0} \approx \frac{d\delta_m(t)}{dt}, \quad \frac{\tilde{t}_{m,n+1} - \tilde{t}_{m,n}}{T_0} \approx \frac{d\tilde{t}_m(t)}{dt} \quad (9)$$

Equation (6) において、振動項 $\tilde{t}_{m,n}$ は十分小さいとして、 $\cos(-\omega_{rf}T_{m,n})$ と V_s の項を $\tilde{t}_{m,n}$ で展開する。このとき、平衡位相での generator 電圧は放射損失 U_0 だけでなく、加速空洞内の wake 場による減速も補償しなければならないから

$$eV_g \cos(-\omega_{rf}\tilde{\tau}) = U_0 + e^2N \sum_{m'} \sum_{n'} W_{\parallel}(cT_{m',n'}) \quad (10)$$

と書ける。これを考慮して $\tilde{t}_m(t)$ の 2 階微分を求めると、

$$\frac{d^2\tilde{t}_m}{dt^2} + \omega_s^2\tilde{t}_m = -\frac{e^2\alpha_c}{E_0T_0} \sum_{m'} \sum_{n'} (\tilde{t}_{m,n} - \tilde{t}_{m',n'}) \times W_{\parallel}'(cT_{m',n'}) \quad (11)$$

ここで、 $T_{m',n'}^{(m',n')} = (n - n')T_0 + (m - m')T_0/h$ であり、シンクロトロン振動数 ω_s は

$$\omega_s = \sqrt{\frac{eV_g\alpha_c\omega_{rf}\sin(-\omega_{rf}\tilde{\tau})}{E_0T_0}} \quad (12)$$

となる。振動項を $\tilde{t}_m(t) = \bar{\tau}_m e^{-i\Omega_\mu(t+mT_0/h)}$ ($\mu = 0, 1, \dots, h-1$) の形に仮定し、縦方向結合インピーダンスを

$$Z_{\parallel}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\parallel}(z) e^{i\omega z/c} \frac{dz}{c} \quad (13)$$

と定義する。Poisson の和公式等を用いて計算すると、次の固有値方程式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{m'=0}^{h-1} A_{m,m'} \bar{\tau}_{m'} &= \lambda_\mu \bar{\tau}_m \\ A_{m,m'} &= i \frac{e^2\alpha_c N}{E_0T_0^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(m-m')p/h} \\ &\quad \times (p\omega_0 + \Omega_\mu) Z_{\parallel}(p\omega_0 + \Omega_\mu) \quad (14) \\ \lambda_\mu &= \Omega_\mu^2 - \omega_s^2 + i \frac{e^2\alpha_c N}{E_0T_0^2} \sum_{m'=0}^{h-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(m-m')p/h} \\ &\quad \times p\omega_0 Z_{\parallel}(p\omega_0) \end{aligned}$$

ここで、 $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \omega_{rf}/h$ はビームの周回周波数である。あるバンチは隣のバンチに対し $2\pi\mu/h$

だけ位相差をつけて振動していると仮定し、 $\bar{\tau}_m = \hat{\tau} e^{-2\pi i\mu m/h}$ とおけば、次のように解ける。

$$\begin{aligned} \Omega_\mu^2 - \omega_s^2 &= i \frac{e\alpha_c \bar{I}}{E_0T_0} \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} \omega_p^{(\mu)} Z_{\parallel}(\omega_p^{(\mu)}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{p=-\infty}^{\infty} hp\omega_0 Z_{\parallel}(hp\omega_0) \right], \quad (15) \\ \omega_p^{(\mu)} &= (hp + \mu)\omega_0 + \Omega_\mu \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{I} = eNh/T_0$ は平均ビーム電流である。Static Robinson instability は coupled-bunch mode number (μ) が $\mu = 0$ の振動が不安定になるものであるから、これ以降 $\mu = 0$ の振動を考える。空洞の加速モードの結合インピーダンスは

$$Z_{\parallel}(\omega) = \frac{R_{sh}/(2(1+\beta))}{1 + iQ_L(\omega_{res}/\omega - \omega/\omega_{res})} \quad (16)$$

と書けるが、空洞の Q 値は一般的に高いため、Eq. (15) の無限和は、 $p = \pm 1$ の項のみで近似できる。よって、Eq. (15) から

$$\begin{aligned} (\Omega_0^2 - \omega_s^2 + C \sin 2\psi) [(1 - i\Omega_0\tau_f)^2 + \tan^2 \psi] \\ = iC \{ (\omega_{rf} + \Omega_0) [(1 - i\Omega_0\tau_f) - i \tan \psi] \\ + (-\omega_{rf} + \Omega_0) [(1 - i\Omega_0\tau_f) + i \tan \psi] \} \quad (17) \end{aligned}$$

ここで、 $C = e\alpha_c\omega_{rf}V_{br}/(2E_0T_0)$ 、 $\tau_f = 1/\alpha_f$ とおいた。Equation (10) の第 2 項は Poisson の和公式を用いて

$$\begin{aligned} e^2N \sum_{m'} \sum_{n'} W_{\parallel}(cT_{m',n'}) &= e\bar{I} \sum_p Z_{\parallel}(hp\omega_0) \\ &\approx eV_{br} \cos^2 \psi \quad (18) \end{aligned}$$

と計算できる。よって、

$$\cos(-\omega_{rf}\tilde{\tau}) = (V_c \cos \phi_s + V_{br} \cos^2 \psi)/V_g \quad (19)$$

となる。定常状態の空洞電圧を phasor で表すと、 $\vec{V}_c = V_c e^{-i\phi_s} = \vec{V}_g - V_{br} \cos \psi e^{-i\psi}$ となり、右辺の分子は phasor で表した generator 電圧 \vec{V}_g の実部となっている（ここで使用している虚数単位 i は参考文献 [3] の j と $i = -j$ の関係にある）。つまり、

$$\omega_{rf}\tilde{\tau} = \arg \vec{V}_g \quad (20)$$

よって、Eq. (12) の 2 乗は

$$\omega_s^2 = \omega_{s0}^2 + C \sin 2\psi \quad (21)$$

である。第 2 項はビーム電流に比例する項で、ビーム負荷による周波数シフトを示している。これを Eq. (17) に代入し、整理すると、

$$\begin{aligned} \Omega_0^4 + 2i\alpha_f\Omega_0^3 - \{(1 + \tan^2 \psi)\alpha_f^2 + \omega_{s0}^2\}\Omega_0^2 \\ - 2i\alpha_f\omega_{s0}^2\Omega_0 + \alpha_f^2\omega_{s0}^2 \left(1 + \tan^2 \psi + \frac{V_{br} \tan \psi}{V_c \sin \phi_s} \right) = 0 \quad (22) \end{aligned}$$

これに $\Omega_0 = ip$ を代入すれば、Eq. (1) の 4 次方程式を得る。