大強度ハドロンリングのチューンダイアグラム構成法について

ON THE CONSTRUCTION OF A STABILITY TUNE DIAGRAM FOR HIGH-INTENSITY HADRON RINGS

岡本宏己#, 小島邦洸, 渡嘉敷雄士
Hiromi Okamoto#, Kunihiro Kojima, Yuji Tokashiki
Graduate School of Advanced Sciences of Matter, Hiroshima University

Abstract

The operating betatron tunes of a high-intensity hadron ring have to be chosen carefully, taking the influence of the space-charge potential into account. The repulsive nature of the Coulomb interaction counteracts the external focusing force from quadrupole magnets, which gives rise to a shift of the effective tune of each individual particle. As the size of this space-charge-induced shift is particle-dependent, the *incoherent tunes* of the particles forming a particular beam cover a finite area in the tune diagram. The conventional rule widely accepted in the community for years requires the machine designer to set the operating point so that the *incoherent tune spread* does not cross nearby low-order single-particle resonance lines. In the present paper, we show numerical evidence that such a rule based on the incoherent picture does not correctly reflect the beam-core dynamics and is too conservative. A new approach for the construction of a stability tune diagram is proposed, employing the self-consistent coherent picture free from any model-dependent unobservables. The proposed rule is applied to the lattice of the rapid cycling synchrotron at J-PARC. We also demonstrate the possibility that specific difference resonances can strongly be suppressed by adjusting the ratio of initial transverse emittances to a proper value.

1. 背景

現代加速器は一定の単位収束構造の繰り返しで構成されていることが多い。とくに、蓄積リング中を運動する荷電粒子は周回毎に同じパターンで変動する外力を受けることになるわけで、この場合、一定条件下での共鳴の発生は不可避である。設計軌道の周りの横方向粒子振動数、即ちベータトロンチューン (ν_{0x},ν_{0y}) の値はリングのラティス構造によって決まる。古典的な Courant-Snyder 理論によれば、リングの動作点を以下の式で定義される"単粒子共鳴線"の近傍に置くことは避けなければならない[1]：

$$k\nu_{0x}+\ell\nu_{0y}=n \tag{1}$$

(k,ℓ,n) は全て整数を表しており、この共鳴を駆動する外部ポテンシャル（$\propto x^{|k|}y^{|\ell|}$）の次数は $m=|k|+|\ell|$ である。

位相空間密度の高いハドロンビームでは、粒子間のクーロン斥力によって実効的なチューン$(\nu_x,\ \nu_y)$が設計値より若干小さくなる。この点を考慮し、上式中の設計チューンを実効値で置き換えたもの

$$k\nu_x+\ell\nu_y=n \tag{2}$$

が所謂"インコヒーレント共鳴条件"である。設計値と実効値の差、$\Delta\nu_x\equiv\nu_{0x}-\nu_x$ および $\Delta\nu_y\equiv\nu_{0y}-\nu_y$ は"インコヒーレントチューンシフト"と呼ばれている。現実的なビーム内部のクーロンポテンシャルは非線形であるため、シフト量は粒子毎に異なる；即ち、ビームを構成する荷電粒子群は、そのビーム特有の粒子密度関数に応じた有限の拡がりを持ってチューンダイアグラム上に分布する（Fig. 1 参照）。現在、加速器業界に広く浸透している一般原則では、インコヒーレントチューンの分布領域が Eq. (1)で定義される単粒子共鳴線と重ならない位置にリングの動作点を設定することになっている。Figure 1 はこのルールを模式的に示した図で、実線は低次の単粒子共鳴線を表す。

個別粒子のインコヒーレント運動に着目した従来の描像にはいくつかの明確な難点がある。例えば、既述の通り、インコヒーレントチューンの拡がりは密度関数に依るため一意に定義できない。そもそも相対論的速度で運動する個別粒子の観測は不可能である。加えて、クーロン相互作用の到達距離を考えれば、密度の高いビーム核を構成する個々の荷電粒子が全く独立に運動することなどあり得ない。この種の古典的描像を端的に否定する具体例のひとつとして、Kapchinskij-Vladimirskij(KV)模型を挙げることができる[2]。KV 型のビームは実空間上で完全に均一な密度分布を持つため、インコヒーレントチュー

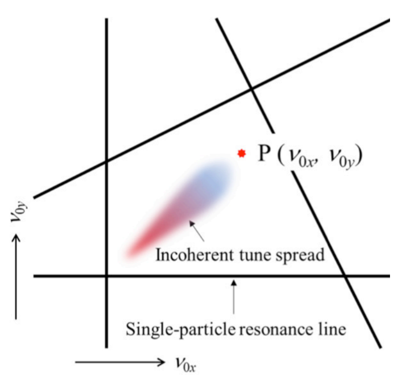

Figure 1: Conventional tune diagram based on the incoherent picture.

#okamoto@sci.hiroshima-u.ac.jp

ンは全ての粒子において同じ値をとる。チューンに拡がりがないので、現行ルールに従う限り、単粒子共鳴線の真上以外の如何なる場所に動作点 P を設定しても問題ないはずである。しかしながら、実際には、KV ビームの共鳴不安定帯は粒子密度に応じた有限の幅を持つことが知られている[3]。

2. コヒーレント共鳴条件

前節の議論から明らかなように、高密度ハドロンビームの安定性を正確に判定するには自己無撞着な解析が必須である。粒子間クーロン散乱の影響が無視できる場合、位相空間分布関数の時間発展はブラソフ方程式に従う。クーロン自己場のポテンシャルを含むハミルトニアンと共に、ブラソフ方程式とポアソン方程式を連立して解くことができれば、大強度ビームの集団運動に対する正確な情報が得られる。この作業を一次元ビームに対して最初に実行したのが F. J. Sacherer である。平滑化近似（smooth approximation）の下で、彼はブラソフ−ポアソン方程式系を摂動論的に解き、以下の“コヒーレント共鳴条件”を導いた[4]：

$$m(\nu_0 - C_{mh}\Delta\nu) = n \tag{3}$$

ここで、ν_0 および $\Delta\nu$ は水平(x)あるいは鉛直(y)方向自由度いずれかの設計チューンとそのシフト量を表す。C_{mh} は方位角方向と動径方向のモード数（それぞれ m と h）に依存するパラメータである[5]。

一様収束系に対する Sacherer の仕事を任意の周期収束系へ拡張した理論が文献[6]に与えられている。ウォーターバッグ模型に基づく摂動解析により、Eq. (3)と本質的に異なる共鳴条件公式

$$m(\nu_0 - C_m\Delta\bar{\nu}) = \frac{n'}{2} \tag{4}$$

が結論されている。n' は整数、$\Delta\bar{\nu}$ は二乗平均チューンシフト、因子 C_m は集団振動モードの次数 m のみに依存する 1 より小さい定数である。インコヒーレントチューンシフトとは異なり、$\Delta\bar{\nu}$ は観測可能量で、しかも位相空間粒子分布とは無関係に一意に決定できる。Equation (3)との実用上最も大きな差は右辺が整数ではなく、半整数となっている点である。このため、チューンダイアグラム上での共鳴線の数が従来公式 Eqs. (1)-(3) が予言する数の二倍になる。誤差磁場など、外部ポテンシャルが駆動するコヒーレント共鳴に対しては、右辺の n' として偶数のみが許される。一方、自己場が駆動する共鳴は n' の偶奇に関係なく起こり得る。

あらゆる周期収束系に適用可能な、文献[6]と同様の数学的理論を二次元ビームに対して構築するのは至難の業である（恐らく不可能だろう）。しかしながら、多粒子シミュレーションや特殊なイオントラップシステムを使った系統的実験のデータ等に基づき、我々は二次元ベータトロン共鳴に関する次のような仮説に到達している[7, 8]：

$$k(\nu_{0x} - C_m\Delta\bar{\nu}_x) + \ell(\nu_{0y} - C_m\Delta\bar{\nu}_y) = \frac{n'}{2} \tag{5}$$

$x(y)$方向の二乗平均チューンシフトは同方向の二乗平均チューン降下率 $\eta_{x(y)}$ と $\Delta\bar{\nu}_{x(y)} = (1-\eta_{x(y)})\nu_{0x(0y)}$ のような関係で結ばれている。

Equation (4)と同様、Eq. (5)においても自己場駆動の共鳴は n' の偶奇に関わらず発生する一方、外場は n' が偶数の共鳴のみ強めることができる。よって、n' が奇数の共鳴は低粒子密度の極限（$\eta_{x(y)} \to 1$）で完全に消失することになる。このとき、Eq. (5)は Eq. (1)に帰着する。また、特定自由度のみが関与する非結合共鳴、即ち $(k,\ell) = (m,0)$ あるいは $(0,m)$ の場合、Eq. (5)は Eq. (4)と一致する。過去の理論では、二次元ビームに対するチューンシフト因子は整数 (k,ℓ) や初期エミッタンス比、ビーム断面の扁平率などに依存する複雑なパラメータである[5]。対照的に、Eq. (5)中の C_m 因子はモードの次数 m にしか依らず、チューンダイアグラム上の全領域で定数値をとると推定されている[8]。

3. 多粒子シミュレーション

3.1 主要な自己場駆動共鳴帯

仮説(5)の妥当性を検証するため、PIC コード“WARP”[9]による多粒子シミュレーションを実施した。Figure 2 は典型的なチューンダイアグラムで、100 セル後の二乗平均エミッタンスの成長率が 5000 点分のデータを基に色分けして表示されている。簡単のため正弦的に周期変動する線形収束力（標準的な FODO ラティスに対応）が仮定されており、初期粒子分布はガウス型である。ビーム電流値は、動作点(1/6, 1/6)におけるチューン降下率が 0.9 となる大きさに固定してある。図の結果は粒子の種類やエネルギーには依らない。実際、Eq. (5)が含む、ビームの状態に依存するパラメータはチューン降下率のみである。

Figure 2 は多数の非結合および結合共鳴帯の存在をはっきり示しているが、Eq. (5)を認めるならば、そのほぼ全てが 3 次以下（$m \leq 3$）の不安定性として無理なく説明できる[8]。観測された非結合共鳴帯および結合共鳴帯の一部はイオントラップを使った

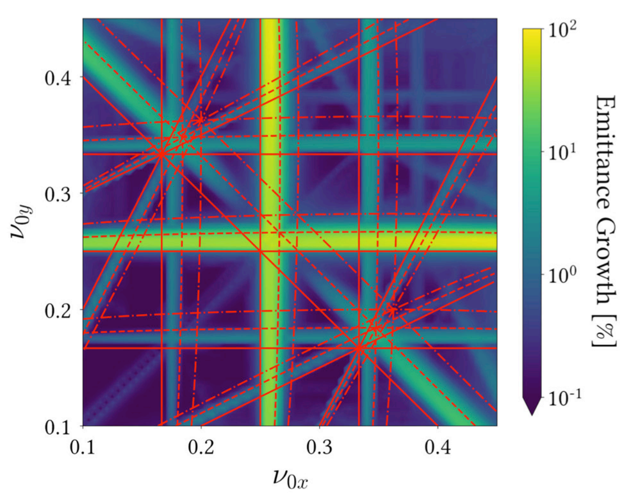

Figure 2: Resonant instability bands revealed by self-consistent multi-particle simulations.

実験でも確認されている[7]。尚、この計算では、誤差磁場は考慮されていない；全ての非線形共鳴が自己場駆動である。従来の共鳴条件式(2)を採用すると、この観測結果の説明には少なくとも 8 次の不安定性まで考える必要が生じる。その場合、なぜ観測不能な 8 次以下の高次共鳴帯が多数存在するのかに対する難しい説明を強いられることになる。

図中の赤線はインコヒーレントな描像との比較のため引かれたもので、因子 C_m を落とした評価式

$$\Gamma_{k\ell}(\Delta\nu_x,\Delta\nu_y) \equiv k(\nu_{0x}-\Delta\nu_x)+\ell(\nu_{0y}-\Delta\nu_y)=\frac{n'}{2} \quad (6)$$

に基づいている。実線は $\Gamma_{k\ell}(0,0)=n'/2$ で、右辺の 1/2 を除き、単粒子共鳴条件(1)に一致する。破線は $\Gamma_{k\ell}(\Delta\bar{\nu}_x,\Delta\bar{\nu}_y)=n'/2$、即ちインコヒーレントチューンシフトがその二乗平均値と等しい場合である。これは、$C_m=1$ のとき、Eq. (5)の共鳴線がチューンダイアグラム上のどこにあるかを示していると言える。一点鎖線は、Eq. (6)中の $\Delta\nu_{x(y)}$ として、ガウス分布におけるインコヒーレントチューンシフトの最大値を使った場合の共鳴線である。従来の理解（Fig. 1）では、実線と一点鎖線に挟まれた領域に動作点を置くことはできないはずだが、実際の共鳴不安定帯の幅はずっと狭いことが分かる。また、各共鳴帯の中心線の位置から、C_m 因子の実効値が 1 より小さいことも見て取れる。

インコヒーレントな描像の矛盾を示す、更なる計算例を Fig. 3 に掲げる。この図は設計チューンが 1/4 に近い領域を拡大したもので、チューン降下率は全領域で 0.9 に固定されている。Equation (5)によれば、縦横に走る強い不安定帯の主因は線形コヒーレント共鳴（$m=2$）である；4 次共鳴（$m=4$）ではない。動作点が P(0.298, 0.298)に位置するとき、ビームは完全に安定であることが WARP シミュレーションで確認されている。図中のドットはこの安定なビームを構成する各粒子の実効的な位置、つまりインコヒーレントチューンの分布をプロットしたものである。ビーム核に含まれる、チューンシフトの大きな粒子群が 4 次の単粒子共鳴線上に多数存在している

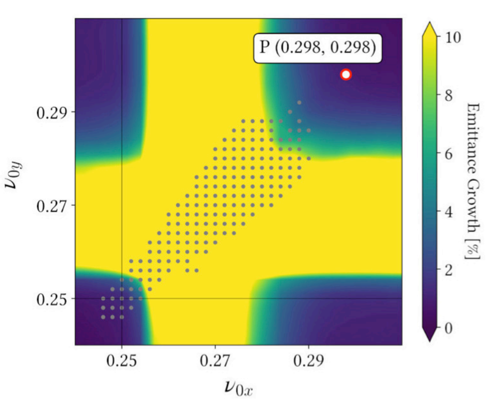

Figure 3: Example of the incoherent tune spread (gray dots) of a Gaussian beam with η=0.9. The operating bare tunes have been set at $(\nu_{0x},\nu_{0y})=(0.298,\ 0.298)$ where the beam is completely stable.

ことに注目して欲しい。この 4 次共鳴を強めるため、八極磁場を付加して同様の計算を行ってみたが、依然としてビームは全く安定であった。これらの観測事実から「ビーム核を構成する粒子が Eq. (2)の下で個別に共鳴することはない」と結論できる。

3.2 差共鳴帯の抑制

これまでの実験データ[7]や Fig. 2 の結果から、$\nu_{0x}-\nu_{0y}=0$ に沿った差共鳴は非常に弱いことが判明している。多くの線形加速器は条件 $\nu_{0x}\approx\nu_{0y}$ 下で運転されているが、やはり深刻な問題は生じていない。これは、水平および鉛直方向の二乗平均エミッタンス $(\varepsilon_x,\varepsilon_y)$ が等しいとき、この差共鳴上ではエミッタンスの交換が起こらないためである。興味深いことに、任意の差共鳴に対して同様の議論が成り立つことが最近の研究で明らかになった[8]。いま、次のような量を定義する：

$$I_{k\ell} \equiv \frac{\varepsilon_x}{k}+\frac{\varepsilon_y}{\ell} \quad (7)$$

上式は、単粒子力学でよく知られた結合共鳴上での不変量 $J_{k\ell}=\varepsilon_x/k-\varepsilon_y/\ell$ に酷似しているが、符号が逆である。初期エミッタンス比が条件 $I_{k\ell}=0$ を満たすビームでは、空間電荷相互作用の有る無しに関わらず、対応する差共鳴（$k\ell<0$）の発生を抑制できる。Figure 4 はシミュレーション結果の一例で、Fig. 2 と同じビーム電流値が仮定されている。ただし、Fig. 4 では、水平方向の初期エミッタンスが全領域

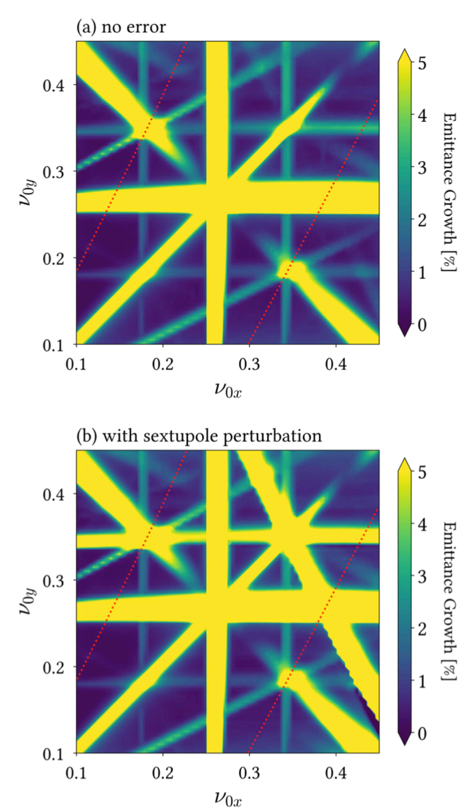

Figure 4: Tune diagram obtained from WARP simulations under the initial condition $\varepsilon_x/\varepsilon_y=2$.

で鉛直方向の 2 倍に設定されている；つまり、$I_{2,-1}=0$ である。図中の点線は（Fig. 2 でも観測された）本来あるべき 3 次差共鳴線の位置を示しているが、有意なエミッタンスの変化が起こっていない。上図(a)で仮定されている外場は完全に線形である一方、下図(b)ではかなり強い六極誤差場（$\propto y^3-3x^2y$）が加えられている。誤差場の導入によって、3 次和共鳴のひとつと鉛直方向の 3 次非結合共鳴が著しく強められているが、にも関わらず $(k,\ell)=(2,-1)$ の差共鳴帯はほとんど見えないままである。

Figure 4 では水平・鉛直方向の初期エミッタンスの不均衡が引き金となって、$k\nu_{0x}-k\nu_{0y}=0$ 上に強い差共鳴が誘起されている。このライン上の差共鳴は "Montague resonance"として知られており、現在の一般的解釈によれば 4 次（$k=\ell=2$）の効果である [10]。しかしながら、Fig. 4(a)から明らかなように、誤差場を含まない時の Montague 共鳴線は他のどの非線形結合共鳴線よりも強く顕在化している。この事実は共鳴線 $k\nu_{0x}-k\nu_{0y}=0$ が実際には Montague 機構ではなく、クーロンポテンシャルが含む 2 次（$k=\ell=1$）のスキュー成分 xy を源としていることを示唆する。

3.3 チューンシフト因子の評価

チューンシフト因子 C_m の正確な評価は実験的には勿論、シミュレーション計算ですら非常に難しい。第一に、ビーム核が不安定化してエミッタンスが増えると不可避的に位相空間密度が低下する。二乗平均チューン降下率ηが 1 に近づく（言い換えれば、チューンシフト $\Delta\bar{\nu}$ が減少する）ため、共鳴帯が本来の位置からずれてしまう。第二に、C_m 因子のモード次数依存性はさほど顕著ではないため（Table 1 参照）、複数の共鳴が重なって存在し得る。例えば、4 次（$m=4$）の共鳴帯は強い 2 次（$m=2$）の共鳴帯に包含されてしまっていることが多い。このような場合、特定モードの C_m 値を正しく評価できない。第三に、不安定化によってビーム核が崩れ、テール（ビームハロー）が形成され始めると C_m 値の評価精度が著しく悪化する。ハロー粒子は一般にインコヒーレントチューンシフトが小さいので、C_m が実際の値よりも低く見積もられてしまうことになる。

これらの難点を避けるため、強収束ラティスとは全く無関係な周期性を持つ外部摂動場を導入する。m 次摂動場の周波数 f_m と収束場の周波数 f の比を $\kappa_m=f_m/f$ と書くと、この外場による非結合共鳴の発生条件は以下の式で与えられる[11]：

$$m(\nu_0-C_m\Delta\bar{\nu})=|n\pm\kappa_m| \tag{8}$$

これを使えば、摂動場のチューン κ_m を掃引することにより、動作点を固定したまま m 次共鳴帯の位置や幅が特定できる。$\nu_{0x}=\nu_{0y}(\equiv\nu_0)$ なる条件下で、チューン降下率ηを変化させつつエミッタンス増大の割合を評価した結果が Fig. 5 である。この WARP シミュレーションでは 4 次摂動が導入されており、動作点は自己場駆動の低次共鳴が起こらない位置（$\nu_0=0.15$）に置かれている。また、初期分布としてガウス型に加えウォーターバッグ型と放物型も採用し、C_m の評価値に有意な差が生じるかどうかを調べた。図中の実線と破線はそれぞれ $C_m=0$ および $C_m=1$ とした場合に予想される共鳴帯の位置、点線は観測された共鳴帯の中心線を Eq. (8)でフィッティングしたものである。Figure 5(a)中の一点鎖線はガウス模型におけるインコヒーレント共鳴帯の境界を示しているが、シミュレーションの結果とは全く合わない。2 次および 3 次非結合共鳴についても同様の評価を実施し、Table 1 のような結果を得た。ガウス分布の C_m 値が他の分布関数と異なる傾向を持つのは、この分布特有の長いテールの存在が影響していると考えられる。

結合共鳴に対しても任意周波数の摂動場を付加した WARP 計算を行い、低次和共鳴の C_m 因子もおおよそ 0.7 から 0.9 の範囲にあることが確認されている [8]。結論として、共鳴条件(5)は自己無撞着な多粒子シミュレーションの結果をよく説明する。コヒーレントチューンシフト因子は観測可能な全ての低次モードに対し 1 より小さく、少なくとも円形加速器で実現可能なビーム密度領域では、動作点に依らない定数であると見なしてよい。

Table 1: Coherent Tune-shift Factors for Non-coupling Resonances

	C_2	C_3	C_4
Gaussian	0.78 ± 0.05	0.77 ± 0.06	0.71 ± 0.06
waterbag	0.71 ± 0.04	0.87 ± 0.03	0.92 ± 0.01
parabolic	0.73 ± 0.05	0.85 ± 0.04	0.87 ± 0.02

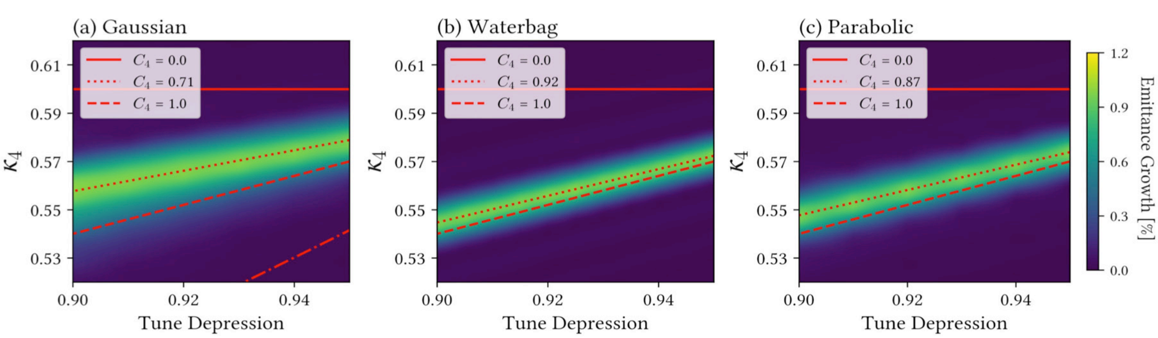

Figure 5: Emittance-growth chart obtained from WARP simulations with the octupole ($m=4$) perturbation on.

4.　チューンダイアグラム構成法

4.1　一般則

本研究で得られた知見を念頭に、新しいチューンダイアグラムの構成手順を考えてみる。まず、考慮すべき共鳴の次数であるが、多粒子シミュレーションおよび過去のイオントラップ実験を通じて得た経験から[7]、3 次以下（$m \leq 3$）の共鳴には例外なく注意を払うべきである。比較的低エネルギーの大強度ハドロンビームを長時間蓄積しなければならない場合には、4 次（$m = 4$）共鳴帯にも配慮した方がよい。一方、さらに高次（$m \geq 5$）のビーム核共鳴は（強い外部摂動場が存在しない限り）ランダウ減衰し、核内部の安定性に深刻な影響を与える可能性は低いと予想される。尚、3.2 節で議論したように、初期エミッタンス比によっては差共鳴帯の一部を無視できる場合がある。

各共鳴帯の幅はビーム構成粒子の位相空間分布や誤差磁場の強さ、ラティス構造にも依存するため、簡単には評価できない。しかしながら、系統的な Warp シミュレーションのデータは、ほとんどの集団共鳴帯が単粒子共鳴線と Eq. (5)において $C_m = 1$ を仮定した場合の共鳴線（Fig. 2 中の実線と破線）の間に収まることを示唆している。その幅は次の式で近似的に評価できる：

$$\frac{\Delta\bar{\nu}}{\eta} \approx \frac{\lambda R r_{\mathrm{p}}}{4\varepsilon_{\perp}\beta^2\gamma^3} \tag{9}$$

ここで、R はリングの平均半径、λはビームの線密度、r_{p} は粒子の古典半径、$\varepsilon_{\perp}$ は横方向の二乗平均エミッタンス（水平・鉛直両方向の値がほぼ等しいと仮定）、βとγはローレンツ因子を表す。Equation (9)の導出に際し、通常の蓄積リングでは常にチューン降下率が 1 に近いという事実を利用した。

以上に基づき、ハドロン蓄積リングの最適動作点探索の第一歩として有効な、コヒーレント描像に基づくチューンダイアグラム構成手順を提案する[8]：

i.　低次モードの C_m 因子として適切な値を選ぶ。
ii.　Eq. (5)を使って、ラティス周期性から予想される危険なハーモニック数 n' に対応した 3 次（場合によっては 4 次）までの共鳴線を描く。
iii.　描いた共鳴線に Eq. (9)で定義される幅を与える。ただし、初期条件が $I_{k\ell} = 0$ を満たす差共鳴帯の幅は狭めるか無視する。
iv.　単粒子共鳴線とその近傍の集団共鳴帯に挟まれた部分（ハロー粒子の共鳴可能域）は不安定領域と見なす。
v.　共鳴フリーの領域に動作点を置く

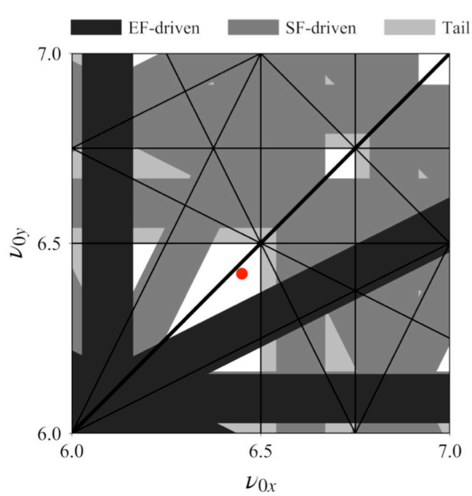

Figure 6: Tune diagram of the RCS at J-PARC. Coherent stop bands of up to the third order ($m \leq 3$) have been taken into account. A red dot indicates the actual operating point of the RCS experimentally determined through a careful tune survey.

4.2　実機への適用例

前節で提案された一般則を J-PARC の 3GeV リング（RCS）に適用した結果が Fig. 6 である。この例では 3 次共鳴までが考慮されている。中間色の帯(SF-driven)は Eq. (5)が予言する 2 次および 3 次のコヒーレント共鳴領域で、その一部は n' が偶数の外場駆動共鳴帯(EF-driven)と重なっている。薄い陰付き部分(Tail)はハローの成長による粒子損失が懸念される領域である。RCS ではペインティング入射によって初期的に $I_{1,-1} = 0$ （$\varepsilon_x \approx \varepsilon_y$）を満たすビームが生成されるので、線形差共鳴帯の幅は無視した。Equation (9)から予想される共鳴帯の最大幅はおよそ 0.13、二乗平均チューン降下率は 0.98 である。RCS はラティス対称性が低いため（超周期数 = 3）、4 次以上の共鳴を無視しても限られた安定領域しか見つからないことが分かる。チューンサーベイを通じて実験的に見出された RCS の最適動作点は $(\nu_{0x}, \nu_{0y}) =$ (6.45,6.42) [12]だが、コヒーレント描像が予言する最も広い安定領域の中央付近に位置している。

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP18H03472 の助成を受けて実施された。

参考文献

[1] E. D. Courant and H. S. Snyder, Annals of Physics 3 (1), 1 (1958).
[2] I. M. Kapchinskij and V. V. Vladimirskij, in Proceedings of the International Conference on High-Energy Accelerators, CERN, Geneva (1959), p. 274.
[3] I. Hofmann *et al.*, Part. Accel. 13, 145 (1983).
[4] F. J. Sacherer, Ph.D Thesis, Lawrence Radiation Laboratory, 1968; Report No. UCRL-18454, 1968.
[5] R. Baartman, AIP Conf. Proc. 448, 56 (1998).
[6] H. Okamoto and K. Yokoya, Nucl. Instrum. Meth. A 482, 51 (2002).
[7] K. Ito, H. Okamoto, Y. Tokashiki, and K. Fukushima, Phys. Rev. Accel. Beams 20, 064201 (2017).
[8] K. Kojima, H. Okamoto, and Y. Tokashiki, Phys. Rev. Accel. Beams 22, 074201 (2019).
[9] D. P. Grote *et al.*, Nucl. Instrum. Meth. A 464, 563 (2001).
[10] W. Montague, CERN/ISR/68-38, 1968.
[11] K. Ito, M. Matsuba, and H. Okamoto, Prog. Theor. Exp. Phys. 2018, 023G01 (2018).
[12] H. Hotchi *et al.*, Phys. Rev. Accel. Beams 20, 060402 (2017).