

g-2/EDM 精密計測用ミュオン蓄積超電導磁石の特異値分解を基礎にした均一磁場設計手法

DESIGN METHOD FOR A MAGNET OF MUON g-2/EDM STORAGE AND HIGH AND HIGH PRECISION MEASUREMENT

阿部充志^{1,A)}, 村田幸弘^{A)}, 飯沼裕美^{B)}, 萩津透^{C)}, 齊藤直人^{C)}, 佐々木憲一^{C)}, 三部 勉^{C)}, 中山久義^{C)}
Mitsushi Abe^{A)}, Yukihiko Murata^{A)}, H. Inuma^{B)}, T. Ogitsu^{C)}, N. Saito^{C)}, K. Sasaki^{C)}, T. Mibe^{C)}, H. Nakayama^{C)}

^{A)}Hitachi Ltd., CTI-Energy, Hitachi-shi, Ibaraki Japan

^{B)}Ibaraki Univ., Mito-shi, Ibaraki, Japan

^{C)}KEK, Tsukuba-shi, Ibaraki, Japan

Abstract

A magnet design method for magneto-motive forces (coil blocks (CBs) and iron yoke) placements for g-2/EDM measurements is presented. CBs and pole placements are determined by tuning SVD (singular value decomposition) eigenmode strengths. SVD is applied on a response matrix from currents to the magnetic field strengths in the muon storage region and 2D placements of magneto-motive forces are designed by tuning the eigenmode strengths of magnetic field by CBs and an iron yoke. The tuning is performed iteratively for CB placements and iron placement. Magnetic field ripples in azimuthal direction are designed to be minimized. A candidate of the g-2/EDM magnet has 5 CBs with iron yoke and center iron poles. The candidate satisfies the specifications of homogeneity {0.2 ppm PP in 2D and less than 1.0 ppm ripples in a ring muon storage area ($31.8 \text{ cm} < R < 34.8 \text{ cm}$ and $-5.0 < Z < 5.0 \text{ cm}$) with 3.0 T strength and little B_R at $R > 0.0 \text{ cm}$, where R and Z are radial and axial positions, respectively}.

1. はじめに

大強度陽子加速器(J-PARC)に配置されている、物質・生命科学実験施設(MLF)の大強度ミュオン(muon)ビームラインの豊富な muon 源からは、十分なビーム強度を保ちつつ、エミッタンスが非常に小さい超冷ビームの実用化研究が進んでいる。これを利用して、高エネルギー加速器研究機構(KEK)を中心に、muon 異常磁気モーメント(g-2)と電気双極子モーメント(EDM)の超精密測定を行う実験(以下では g-2/EDM 実験)準備を進めている[1, 2, 3]。

g-2/EDM 実験はこれまでに、CERN[1]とBNL[2]で、均一磁場中で muon を周回・蓄積し、才差運動周波数から g-2/EDM を計測する手法で行われた。実験結果は標準理論からの予測値と3- σ (標準偏差)のズレがあり、標準理論を超える新しい物理の可能性が議論されてきた。そこで、精度を向上させた実験が、米国 FNAL と J-PARC で準備が進められている。

FNAL での実験は、BNL から移送した超電導磁石で、BNLと同じ蓄積リングを用いるが、磁場精度を改善(誤差磁場: local 50 ppm. 周回方向平均 1ppm 以下)し、ミュオンビームの質・強度を上げることで実験精度の向

上が期待される。実験準備は最終段階に入り、現在、ビームコミッショニング中である。

J-PARC の g-2/EDM 実験では、CERN, BNL に比べて弱エネルギー muon を利用し、小さい蓄積軌道半径を用いる。その結果、MRI 磁石で開発された技術[4,5]を適用でき、非常に均一な磁場を確保できる。現在、2D 断面上で、0.2ppm、周回方向で 1,0ppm、シミングして 0.2ppm を目標均一度として、磁石設計を進めている。良質大強度の muon と高精度磁場により、従来より大幅に改善した計測精度で g-2/EDM 実験を遂行できると期待できる。

2. g-2/EDM 実験用磁石磁場概念と仕様

J-PARC-g-2/EDM 実験の構成は参考文献[3,6,7]に記載されている。TDR(Technical Design Report)議論は最終段階に入っており、ビームライン、蓄積磁石、検出器などの各実験サブグループが精力的に予備実験に取り組んでいる。ここでは、この実験の中心である muon 蓄積リング用の超電導磁石のコイルブロック(CB)と鉄 yoke 配置の概念設計について報告する。以下では「超電導」は省略して記述する。

2.1 磁石磁場の仕様

g-2/EDM 実験パラメータは Table 1 である。米国 BNL-E821 実験と米国 FNAL は同じ装置である。米国実験と比べて J-PARC 実験ではエネルギー小さく(1/10)、磁場が約 2 倍強いために、蓄積領域の半径は約 1/20 と小さい。このために均一磁場の調整が精度良く出来ると期待でき、ビーム蓄積領域で 1ppm(peak-to-peak)以下の均一度を目指している。以下では全て均一度は peak-to-peak (PP)値である。均一度調整は MRI 磁石のシミング[8]と同じ手法を使う予定である。

Table 1: Basic Parameters for g-2/EDM Experiments

Parameters	BNLE821	FNAL	J-PARC g-2/EDM
Beam momentum	3.09 GeV/c		0.30 GeV
γ	29.3		3.0
Storage flux	1.45T		3.0 T
ring			
Radius	7.0 m		0.333
Current drive	Power supply, (<0.1ppm stability with Filed FB)		Persistent mode
Conductor current	5200 A		425 A
Beam focus	Electric quadruple		Weak focus
Number of μ^+	5.0E+09	1.8E+11	1.5E+12
Statistical uncertainty	0.46 ppm	0.1 ppm	0.1 ppm

The values in italic letters are planned values.

¹ mitsushi.abe.pg@hitachi.com

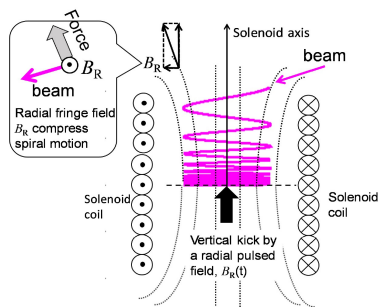


Figure 1: Schematic magnetic force lines, muon orbit and radial magnetic field component.

Figure 1 は本実験の軌道と磁場分布の概念を示す。本磁石の中心部にはビーム蓄積領域(3cm 半径方向幅、10cm 軸方向高さ)があり、上部はスパイラル入射 (Spiral Injection) 領域である[6,7]。図の上側から入射した muon は、磁石の持つ半径方向磁場の影響を受けて、軸方向(Z)の移動速度を減速しながら、磁石中央方向(半径 $R=0.333\text{m}$, 軸方向 $Z=0.0\text{m}$)に移動する。そして、蓄積領域に来たところで、空芯コイルを用いてパルス状の径方向磁場 B_R (ピーク磁場1ガウス程度、パルス時間 200~400ns)を発生させ、ビームの Z 方向の運動をほぼ止める。muon ビームは弱収束磁場の中で周回運動をしながら、寿命が来て崩壊するまで保持される[6,7]。

このような磁石内の muon 移動・蓄積を実現可能とするために、ビーム蓄積領域には磁場均一度と弱収束磁場の仕様、入射領域には、muon の軸方向の移動を左右する半径方向磁場 B_R の仕様がある。それらの仕様を Table 2 に示す。

Table 2: Specifications of a Static Magnetic Field

Parameters	Values
Magnetic field strength	3.0 T
Homogeneity (B_z)	<1.0 ppm (0.2 ppm 2D)
Area with Homogeneous magnetic field	R: 0.318 m to 0.348m Z: -0.05 m to +0.05 m
n-index of Gradient field	0.0 to 3.0E-4
Magnetic field radial component B_R	$B_R > -1.0\text{E-}4$ T
External error field	Possible to be shimmed

3. 起磁力配置の概念検討

磁場分布の概念設計を通して、Table 2 の磁石仕様を満たす起磁力配置が可能であることを確認する。このため、Figure 2 に示すように 3 段階で起磁力配置を決める。MRI 磁石設計[4]でも使った多数の線ループ電流(円電流、以下では FL: Filament Loop)を配置して、連続的電流分布(Step-1)の計算モデルを用いる。その後、FL 電流を CBs や鉄 yoke へ置き換える(Step-2)。最後に巻き線数を整数化(Step-3)する。

3.1 連続電流分布による磁場分布検討

FL 電流配置体系を半径-軸方向位置の 2 次元(2D)体系で Figure 3 に 2 種類示す。Figure 3(a)は、トンネル型 MRI 磁石のような単純なソレノイド状の起磁力配置である。一方 Figure 3(b)は、検出器を配置する領域($R < 0.3\text{m}$, $|Z| < 0.65\text{m}$)を除き、muon 蓄積領域を取り囲むように配置した。muon 蓄積領域は均一磁場領域であり、矩形断面の円筒殻領域である。起磁

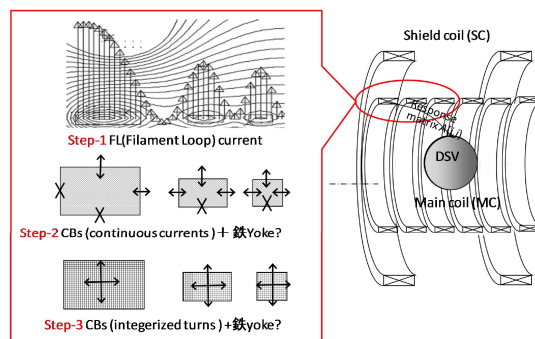


Figure 2: Schematic draw of the strategy for CB determinations. Step-1 gives approximated CB positions and step-2 and step-3 give accurate CB placements with continuous currents (step-2) and integerized winding turns (step3). Arrows denote FL current magnitudes (step-1), tuning directions for side (step-2) and for positions (step-3). Crosses denote sides without tunings.

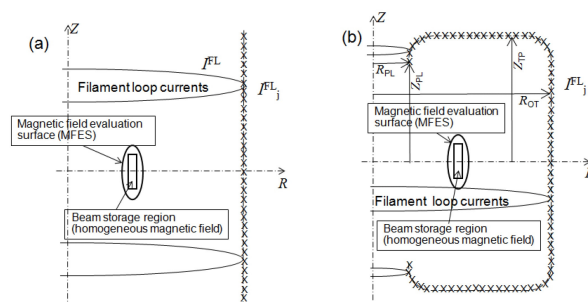


Figure 3: FL currents placements to discuss a magnetic field distribution concept. FLs are circular currents and their positions are indicated as crosses imitating continuously distributed currents. The rectangles indicate the beam storage and the ellipses indicate the magnetic field evaluation surface (MFES) on which magnetic field evaluation points (MFEPs) are placed. (a) Solenoid only type, (b) solenoid + iron-yoke type.

力配置の設計計算では、蓄積領域を囲むように楕円断面の磁場評価面(MFES: Magnetic Field Evaluation Surface)を配置し、その上に磁場評価点(MFEP: Magnetic Field Evaluation Point)を配置(150 個)して、磁場を均一に近づくように、起磁力配置を設計した。

FL 電流分布は TSVD(Truncated Singular Value Decomposition: 打ち切り特異値分解)を用いて算出する[9,10]。この手法で、磁場分布の概念を把握し、算出した FL 電流分布 F^L に基づいて CB を配置する。今回は鉄 yoke を反映した部分も存在する。 F^L から MFEP への応答行列 A を算出し、その線型行列式、

$$A^t A F^L = A^t B, \quad (1)$$

を TSVD 正則化で解く。ここで、 B は MFEP の磁場分布を示すベクトルで要素は軸方向磁場成分 B_{z_i} (i 番目位置)、 F^L は FL 電流分布を表すベクトルで要素 F^L_j は j 番目位置に配置される FL 電流値である。

特異値分解を A に適用し

$$A = \sum u_k \lambda_k v_k^t, \quad (2)$$

を得る。ここで、 \mathbf{v}_k , \mathbf{u}_k , λ_k は、それぞれ k 番目の電流、磁場の固有分布ベクトルとその換算を表す特異値(T/m)である。

参考文献[4]のように、固有モードの加算を強度 P_k

$$P_k = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_k / n_p^{1/2} \quad (3)$$

で行うと、MFEP 上の磁場分布 \mathbf{B} が、

$$\mathbf{B} = \sum F_k n_p^{1/2} P_k \mathbf{u}_k, \quad (4)$$

一様となる。このとき、電流分布 \mathbf{I}^L は、

$$\mathbf{I}^L = \mathbf{W}_1^{-1} \sum F_k n_p^{1/2} P_k \mathbf{v}_k / \lambda_k, \quad (5)$$

である。 F_k は各固有モードの加算割合で 1.0 以下である。和は固有モード k について実行する。また、 n_p は MFEP 数である。固有モードを調整する目標の固有モード強度 P_k^{3T} (3T 一様分布に必要な k 番目固有モード強度)は、式(3)で \mathbf{B} を 3T 一様磁場として算出する。起磁力(CB, 鉄 yoke) 配置調整では、この強度を再現する。

FL 電流分布(矢印)と磁場分布を 2 つ FL 配置で、それぞれ 5 個の固有モードを使った場合を Fig.4 に示す。左側{(a)および(b)}には磁場分布を等高線で示す。上下に走っている線は磁力線(等磁束線)であり、muon 蓄積領域の中心から放射状の線は残差磁場強度の等高線を示し、3.0T と $3.0T \pm 0.3\mu T$ ($\pm 0.1\text{ppm}$), $3.0T \pm 3.0\mu T$ ($\pm 1.0\text{ppm}$), $3.0T \pm 30\mu T$ ($\pm 10\text{ppm}$)の位置に描いている。また、打点領域は 3.0T より磁場が強い領域である。また、右側には軸方向位置 Z 方向の関数で muon 軌道の半径上の B_R 分布を示している。この軌道半径 r_0 は下記で算出している。

$$r_0 = p/qB = 300\text{MeV}/qBc = 1/B(r_0, Z) \quad (6)$$

ここで、 $p, q, c, B(r_0, Z)$ は、運動量[kg/m/s], 電荷[eV], 光速[m/s], 位置(r_0, Z)での磁場強度[T]である。

ソレノイド状の FL 配置{Figure 3(a), Figure 4(a), Figure 4(c)}では、蓄積領域の磁場均一度は良好であるが、Figure 4(c)に示す B_R 分布には負値があり、 $B_R > -1.0\text{ G}$ の条件を満たさない。これは、磁場強度の分布で、磁石端部の CB から延び、 $R < 0.333\text{ m}$ の磁

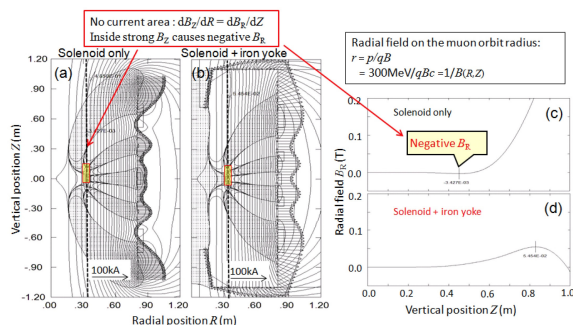


Figure 4: Candidate magnetic field distributions. (a) and (b) are for solenoid type. (b) and (c) are for solenoid+iron yoke type. (a), (b) Magnetic field distribution with contour lines of equi-fluxes and magnetic field strengths. Lines running top to bottom are equi-flux (magnetic force) lines at every 0.1 Wb. Radiative lines are equi-strength lines of magnetic field at 3.0 T and $3.0\text{ T} \pm 0.3$, $\pm 3.0\ \mu\text{T}$, $\pm 30.0\ \mu\text{T}$. (c), (d) B_R distribution along beam orbits.

場を強める磁場分布の影響である。単純なソレノイド状 CB 配置のみでは、この不適切な B_R 分布は不可避で、磁場仕様を満たすことは出来ない。

一方、Figure 3(b)の電流配置では、ビーム蓄積領域の半径内側に強磁場部を発生する{Figure 4(b), Figure 4(d)}。Figure 3(a), Figure 4(a) の時には問題の原因であった強磁場領域は磁石中心部に移り、水平磁場条件 ($B_R > -1.0\text{ G}$) を満たす。muon 蓄積領域の均一度も良い。従って、Figure 4(a)を目標の磁場分布概念とした。

次に、目標磁場分布を正確に決める。そのため、参考文献[4]のように、Figure 5(b){下側}に示した固有モードの使用数を増やしなが、ビーム蓄積領域の均一度を確認する。 $Z=0$ 面対称な固有モードのみ(奇数番目)を示す。各枠で、最上部は固有モード番号である。特異値(2番目)の大きさ順に番号を付けている。上から3番目と4番目の数値はそれぞれ、3.0T 一様磁場に必要、固有モード強度(T)とその PP 振幅を示した。これらの固有モードは MFES 上で評価した。特異値の小さい高次固有モードでは、発生される磁場強度は小さい。例えば、1 番目固有モードは約 3.0T の磁場を作るが、11 番目の固有モードはこの楕円断面上で $1.8\mu\text{T}$ の寄与でしかない。13 番目固有モードによる磁場は、非常に小さいので無視できる。一つ注意すべき項目を指摘する。打点領域は磁場の強い部分である。7 番目までの 4 個の固有モードでは最内側(小半径側)では磁場が強いが、高次モード(9 番目以上)では最内側では磁場が弱い。Figure 4 で、小半径部で磁場の強い部分を作る固有モードは 7 番目以下の固有モードである。

Figure 5(a)には固有モードの加算数と得られる蓄積領域の磁場均一度を示している。固有モードを低次から加算している。小数点以下の値は、加算割合を小さくしていることを示す。例えば $M_p=10.1$ は 10 番目までの 3T 一様磁場に必要固有モード強度 P_k^{3T}

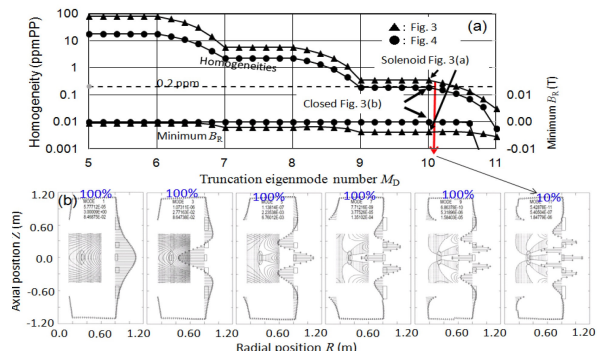


Figure 5: Homogeneity and SVD eigenmodes for Fig. 4 magnetic field. (a) Relations of homogeneity and the truncation eigenmode number for the two magnetic field candidates. (b) Eigenmodes of magnetic field and FL current distribution for Fig. 2(b) solenoid+iron yoke type. Dotted areas are positive strong magnetic field areas. The numbers in each frame are singular value, rms magnetic field strength necessary for 3.0 T, and peak-to-peak magnetic field strength for 3.0 T. For the latter 2 numbers, B_z strengths are evaluated on the elliptic surface.

を $F_k=1.0$ 、11 番目 P_{11}^{3T} を $F_{11}=0.1$ の割合で加算することを意味する(式(5)参照)。この場合(Figure 5(a)矢印の位置)では、0.2 ppm を下る均一度となるが、この条件を、以後の検討で目標の磁場分布とした。

この条件での、蓄積領域付近の磁場分布は Figure 6 である。ビーム蓄積領域近傍を拡大して示すが、均一度は 0.170 ppm である。

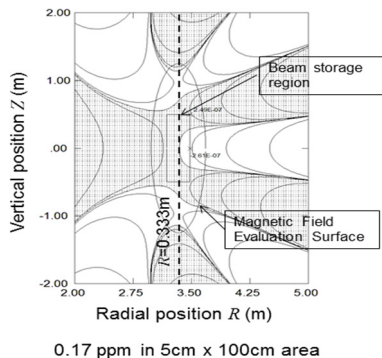


Figure 6: Target magnetic field distribution for the g-2/EDM magnet design. Magnetic field strength distribution at zoomed center area with contour lines of 3.0 T, ± 0.1 , ± 1.0 , ± 10.0 ppm. The elliptic line is MFES and rectangle shows the beam storage area.

4. 目標磁場を実現する起磁力配置

目標磁場分布(Figure 6)が、背系磁石の磁場分布となるように、離散的に配置した CBs と鉄 yoke の位置形状を調整する方法を議論する。

4.1 均一磁場の再現

Figure 5 を実現する FL 電流分布は、Figure 7(a) である。本節では Figure 2 で言う Step-2 を議論する。この連続分布 FL 電流を、離散的に配置すると、近似的に Figure 7(b) である。この配置は人手により FL

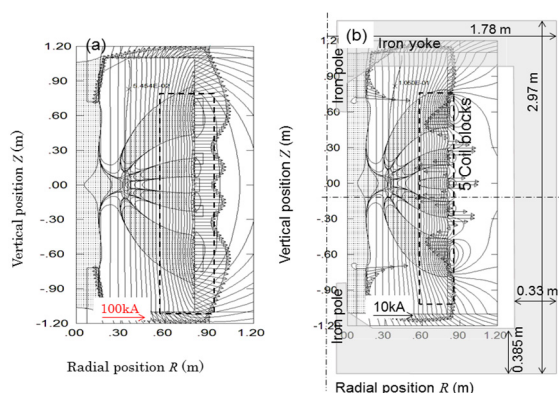


Figure 7: FL currents (Fig. 5 left) are replaced by iron yoke and coil blocks. The number of CBs are 4 in left (a) and 5 in right (b). Residual loop currents (arrows) exist in right and they are positive when they are in outside direction from beam storage volume. The lines running vertical direction are the contour lines of magnetic fluxes at 0.1 Wb. Lines in radial manners are contour lines at 3.0T and ± 0.1 , ± 1.0 , ± 10.0 ppm. In the dotted area, magnetic field is stronger than 3.0 T.

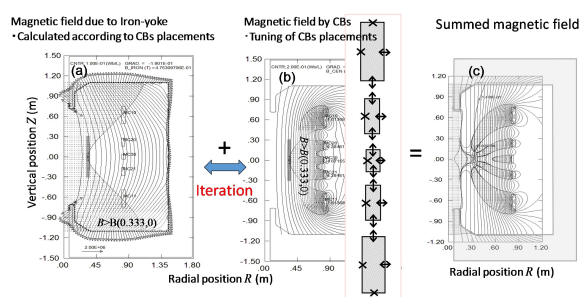


Figure 8: FL currents (arrows in left) are replaced by iron yoke and coil blocks (right). Residual loop currents (arrows) exist in right and they are positive when they are in outside direction. The lines running vertical direction are the contour lines of magnetic fluxes at 0.1 Wb. Lines in radial manners are contour lines at 3.0T and ± 0.1 , ± 1.0 , ± 10.0 ppm. In the dotted area, magnetic field is stronger than 3.0 T.

電流が小さくするように配置したもので、均一度は 35 ppm と悪い。矢印の残差 FL 電流値は(a)→(b)で 1/10 以下となっており、CB および鉄 yoke 配置が妥当に行われていると考える。さらに残差 FL 電流が零に漸近するように CB・鉄 yoke の位置形状を調整する。

Figure 8 に示すように、鉄 yoke が作る磁場と、CBs が作る磁場に分離し、CB 配置を、参考文献[9]の手法で最適化する。鉄 yoke が作る磁場に寄る磁場は参考文献[8,11]の方法を使って、鉄 yoke 表面の電流分布で表現している。図に示す両矢印部分の位置を、固有モード強度を Figure 5 の磁場に一致するように、最適化する。この計算では、CB 位置形状の最適化(右側)と 3D 非線形磁場計算(左側)を交互に行って、起磁力配置を最適化する。

Figure 9 は繰り返し計算中の均一度を回数毎の均一度で示した。7回の繰り返し計算を実行した。1回目には鉄 pole の形状を変更した。6,7 回目はコイル巻き線数を決め、CB 中心位置のみの微調整である(Step-3)。7 回目の算出磁場は、当初計画の磁場分布の均一度と同程度である。

そのときの磁場分布を Figure 10 に示す。左側に CB、鉄 yoke を含む領域の磁場分布、右下に蓄積領域の磁場分布、右上には粒子半径位置の B_R を軸方向位置の関数で示す。この分布は、Figure 3 から Figure 6 で議論した目標磁場分布をほぼ再現しており、こ

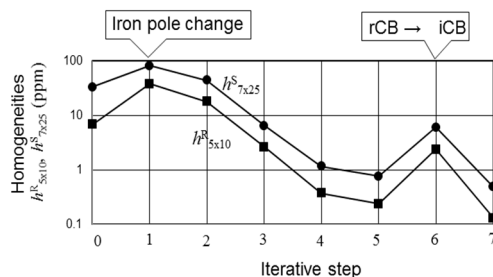


Figure 9: Homogeneities during iterative calculation. A line with black circles are for homogeneities of 7 cm wide 25 cm height area and a line with squares are for 5 cm side and 10 cm rectangle beam storage area.

の手法で目標の磁場分布が精度良く求められることがわかる。

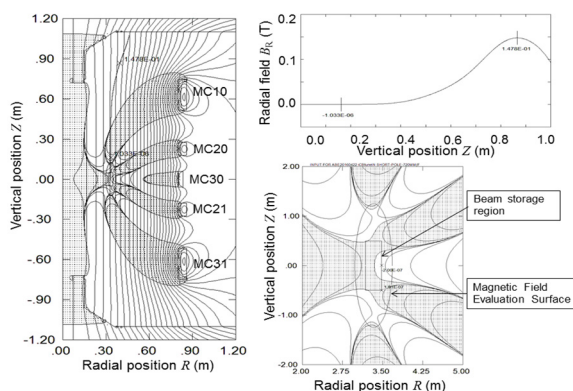


Figure 10: Obtained 5 CBs, iron yoke placements and magnetic field. Left is the magnetic field distribution. Right top plots B_R at orbit radius as a function of axial position. Right bottom shows the zoomed magnetic field distribution.

4.2 誤差磁場への対応と討論

設計段階での誤差磁場は、周回方向に分布を持つ3Dリップル磁場である。このような磁場は可能な限り小さくする。例えば、muonのInjection用の鉄yoke穴の影響を考える。上側にはビーム入射穴1個を(上下対称配置で合計2個)のみ配置した場合には、周回方向のリップルは365ppmであった。

しかし、上下共に4個の入射穴を配置して、入射穴の影響を周回方向に分散させた場合には、2.5 μT と小さくできる。これは一例であるが、今後詳細設計を通じて誤差磁場を抑制する設計を行っていく。

また、MRIで行うシミング[5]も、本磁石に適用する。このシミングで、制作時や周囲の磁性体などによる環境誤差磁場の補正も可能となる。本磁石を用いた磁石では弱収束磁場を用いる。そのため、今後、半径方向に分布を持つ傾斜磁場コイルも設計していく。これらの設計は、今後詳細設計で進めていく。

5. まとめ

リング状の均一磁場領域を発生でき、鉄yokeを含む磁石の起磁力配置設計を開発し、g-2/EDM詳細計測用磁石に適用した。本手法は、MRI用磁石の設計手法を、鉄yokeを含む体系に拡張適用したものである。均一磁場領域を取り囲むように配置した線輪電流から均一磁場領域磁場への応答行列を算出し、そのSVD固有モードを加算して、均一度条件を満たす、目標磁場分布を決めた。この段階で、Spiral Injection[7]を可能とする入射軌道上で半径方向磁場成分が負にならない起磁力配置も確認した。

その固有モード強度を再現するように鉄yokeとCBを配置する。この最適化は、3D非線形磁場計算とCB位置形状最適化を交互に繰り返して、実行する。その結果、目標の磁場分布を持つ起磁力配置が求められた。CB数は5個で、全体を鉄yokeで囲む。また中心部には、磁石中心に向かって突起形状の鉄

poleを持つ。今後誤差磁場の検討と、その対策を詳細化していく必要がある。

参考文献

- [1] J. Bailey *et al.*, Final Report on the CERN Muon Storage Ring Including the Anomalous Magnetic Moment and the Electric Dipole Moment of the Muon, and a Direct Test of Relativistic Time Dilation, Nucl. Phys. B150 (1979) 1.
- [2] G.W. Bennett *et al.*, Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL, Phys. Rev. D 73, 072003 (2006).
- [3] 三部勉、石田勝彦、佐々木憲一、「ミュオン g-2/EDM 実験」、<http://www.jahep.org/hepnews/index-archive.html>、高エネルギー物理学研究者会議(JAHP: Japan Association of High Energy Physicists)、高エネルギーニュース vol. 12、no.3, 2012 pp. 209-218.
- [4] M. Abe, K. Shibata, “Coil Block Designs with Good Homogeneity for MRI Magnets Based on SVD Eigenmode Strengths”, IEEE Trans. Magn., vol. 51, no.10, 7002713, Oct. 2015.
- [5] M. Abe *et al.*, ‘Static Magnetic Field Shimming Calculation Using TSVD Regularization With Constraints of Iron Piece Placements’, IEEE Trans. on Appl. Supercond. vol. 27, no. 7, Oct. 2017, Art. no. 4400812.
- [6] H. Iinuma *et al.*, Development of a kicker pulse magnet system for three dimensional spiral beam injection scheme, Proceedings of the 10th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan (August 3-5, 2013, Nagoya, Japan) MOOS14.
- [7] H. Iinuma *et al.*, Three dimensional spiral injection scheme for g-2/EDM experiment at J-PARC, NIM A Vol. 832 P.51-62 (2016).
- [8] M. Abe *et al.*, "Experimental study on electromagnetic interactions between plasmas and vacuum vessel during disruptions in the Hitachi tokamak (HT 2)", Jpn. J. Appl. Phys. 29(1990) p.395.
- [9] H. Yanai and K. Takeuchi, Projection Matrix, Generalized Inverse Matrix, Singular Value Decomposition. Univ. Tokyo Press, 1983.
- [10] M. Guamieri *et al.*, “A methodological analysis of different formulations for solving inverse electromagnetic problems,” IEEE Trans. Magn., vol. 26, no. 2, pp. 622-625, Mar. 1990.
- [11] D.W. Swain, G.H. Neilson, An efficient technique for magnetic analysis of non-circular, high-beta tokamak equilibria, Nucl. Fusion, Vol. 22 no. 8, (1982) p.1409.