

バリアーバケット閉じ込めの力学
Beam Confinement Dynamics in a Barrier Bucket

廣瀬正武^{#A,B)}、高山 健^{A,B,C,D)}、由元 崇^{B,C)}、Liu Xiguang^{B,C)}
Masatake Hirose^{A,B)}、Ken Takayama^{A,B,C,D)}、Takashi Yoshimoto^{B,C)}、Liu Xiggung^{B,C)}
^{A)}Tokyo City University
^{B)}High Energy Accelerator Research Organization (KEK)
^{C)}Tokyo Institute of Technology
^{D)}The Graduate University for Advanced Studies (SOKENDAI)

Abstract

Beam handling using the barrier bucket has been carried out since its first realization by Jim Griffin of Fermilab in 1983, where the barrier voltage was obtained by superimposing multiple harmonic RFs. In an induction synchrotron such as the KEK digital accelerator, the barrier voltage pulse with the almost rectangular shape is generated in the induction cell of a 1-to-1 pulse transformer driven by the switching power supply. Its peak amplitude and pulse length are flexibly changed but the rising/falling time is uniquely determined by a combination of the circuit parameters including characteristics of the employed solid-state switching element. Behavior of particles captured in the barrier bucket is quite various, depending on the barrier voltage shape. Even in the early stage of development of the induction synchrotron, chaotic behaviors have been known among us. This paper will systematically discuss about the phenomenology of beam dynamics for the barrier bucket and compare the results experimentally obtained using the KEK digital accelerator with numerical simulations.

1. はじめに

RF を加速媒体として使う加速器では RF が作る RF バケットで粒子を捕捉し、加速するのは言うまでもない。1983 年にフェルミ研究所の Griffin が RF 基本波に一定の割合の振幅を持った複数の高調波の位相をずらして重ね合わせる方法で、粒子進行軸方向の位相上に、リップルは残るが極性の異なる矩形状の実効的電圧が発生し得る事を実験的に示した^[1]。この電圧をバリアー電圧、それが作る位相空間の安定領域をバリアーバケットと呼ぶ様になった。どの様な関数であっても周期性さえあれば、フーリエ級数展開が可能である事は数学上 18 世紀から知られているのであるから、当然と言えば当然である。但し、kV 以上の電圧振幅を持った無限の高調波を使う訳ではないので、完全な矩形波を作る事は出来ない。その後、この手法は進化^[2]し、半導体増幅器で増幅した比較的低電圧の矩形波を low Q 空洞にフィードする手法でバリアー電圧を実現し、バリアーバケットを用いたビームハンドリングの実用化が行われた^[3]。

一方これとは別のアプローチとして 1 対 1 のパルストランスの 1 次側に図 1 に示す様なスイッチング電源で発生したパルス電圧を印加し、2 次側に同じパルス電圧を生成し、これをバリアー電圧として用いる方法も実用化された。全く同じ手法で発生するパルス電圧を加速電圧としても用いる誘導加速シンクロトロンの中で日常的に使用されている。遅い繰り返し、速い繰り返しの誘導シンクロトロンが共に実証されている^{[4],[5]}。図 2 に示すのは速い繰り返し誘導加速シンクロトロンである KEK デジタル加速器である。後で示すバリアーバケットビームハンドリングの実験結果はここで得られた。

masatake@post.kek.jp

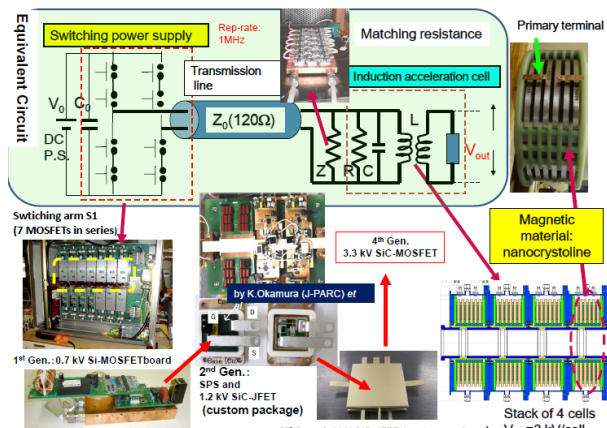


Figure 1: Equivalent circuit for the induction acceleration system and details of each component including the evolution of the employed solid-state switching element.

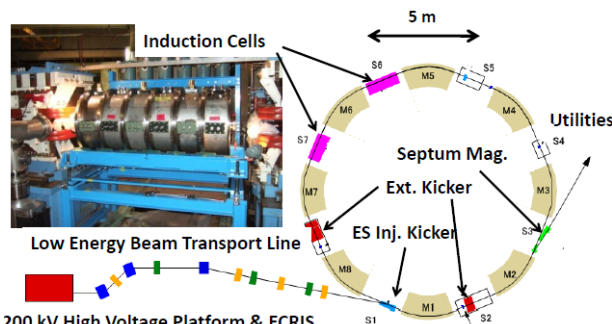


Figure 2: Schematic View of the KEK Digital Accelerator.

図 1 に示す誘導加速システムには図 3 に示す様な理想的なバリアー電圧の生成が期待される。バリアー電圧自身のパラメーターである波高 V_{bb} は図 1 中の等価回路の最上流に位置する DC 充電器の設定電圧で決まる。パルス長 τ とバリアーパルス間隔 T

はスイッチング素子の On/Off 動作を司るゲート信号のタイミング(t_1, t_2, t_3, t_4)だけで自由に決定する。これは予めプログラムしておいて FPGA (Fields Programmed Gate Array) で制御する^[6]。パルスの立ち上がり・立下り時間 t_{rise}/t_{off} はスイッチング素子の特性とスイッチング電源、負荷、これらを結ぶ伝送線が持つ回路定数でユニークに決まる。実際に使用しているシステムでは約 30 nsec である。

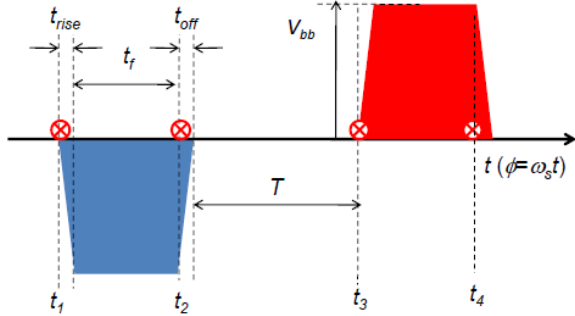


Figure 3: Barrier voltage pulses.

2. バリヤー閉じ込めの数学

リング周回毎に一回、閉じ込め電圧 V の影響を受ける電価数 Q を持った粒子の進行軸方向の挙動は以下の力学パラメータ (粒子のエネルギー E と位相 ϕ) に関する漸化式で示され、印加される電圧は粒子の誘導加速セルを通過する時間が異なるので、粒子毎に異なり $V(\phi_n)$ によって与えられる。

$$\begin{cases} E_{n+1} = E_n + QeV(\phi_n) \\ \phi_{n+1} = \left\{ \phi_n + 2\pi\eta \cdot \left(\frac{\Delta p}{p} \right) \right\}_{\text{mod } 2\pi} \end{cases} \quad (1)$$

ここで n はターン数、 s の付いた量は全て理想粒子のパラメーターである。

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta E_n}{\beta_s^2 E_s} = \frac{E_n - E_s}{\beta_s^2 E_s} \quad (2)$$

$$\eta = \frac{1}{\gamma_r^2} - \frac{1}{\gamma_s^2} (< 0) \quad (3)$$

(η : momentum slippage factor, γ_r : transition γ)

式 (1) より求められるターンごとの粒子パラメーターを位相空間 ($\phi, \Delta p/p$) にポアンカレプロットを行う事によって粒子挙動追う。

ここでは、閉じ込め電圧の立ち上がりパターンとして階段関数、三角関数(Sin 関数)、線形関数の場合の粒子挙動の特徴について比較を行った。先ず前者二つについて特徴的な軌道の粒子軌跡を示す。尚、階段関数の場合は、振幅を V_{bb} とすると、 $V(\phi) = V_{bb} \text{Sign}(\phi)$ (-1 for $\phi < 0$, +1 for $\phi > 0$ 、三角関数では

$V(\phi) = V_{bb} \sin(\phi)$ である。三角関数の場合は所謂 Standard Mapping^[7] のケースに当たる。1950 年代の中頃、計算機第一世代の ILLIAC によるシンクロトロンでの高周波加速のシミュレーション研究^[8]を開始した頃以来、詳細に調べられた。この研究により Chaos 研究の曙が拓かれたと言える。

(1) 階段関数の場合: Figure 4 に擬カオスの振る舞いは歴然としている。

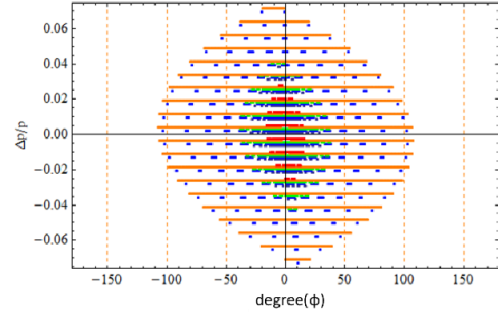


Figure 4: Step-function.

(2) 三角関数の場合: セパトリックス周辺部の Chaos 軌道は歴然としている。

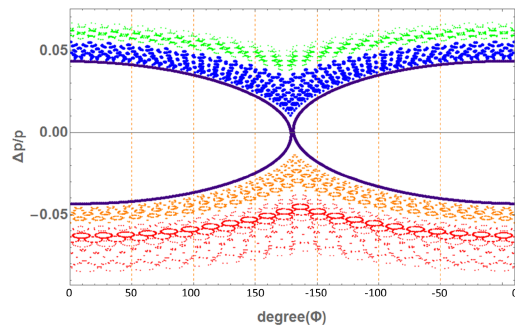


Figure 5: Trigonometric function.

(3) 線形関数の場合: 幸い解析解が存在する。

$y_n = \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_n$, $x_n = \frac{\phi_n}{2\pi|\eta|}$ とおくと、漸化式は

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + K \cdot x_n \\ x_{n+1} = \{x_n - y_{n+1}\}_{\text{mod } 1/|\eta|} \end{cases} \quad (4)$$

となる。ここで $K \equiv \frac{2Qe|\eta|V_0}{\beta_s^2 E_s}$ とおけば、

$$x_{n+1} - (2-K)x_n + x_{n-1} = 0 \quad (5)$$

となり、以下のような特性方程式を導ける。

$$z^2 - (2-K)z + 1 = 0 \quad (6)$$

また、 $\alpha + \beta = (2-K)$, $\alpha \cdot \beta = 1$ とおく。

$$\begin{cases} x_{n+1} - \alpha x_n = \beta(x_n - \alpha x_{n-1}) \\ x_{n+1} - \beta x_n = \alpha(x_n - \beta x_{n-1}) \end{cases} \quad (7)$$

特性方程式の解 α, β は

$$\begin{cases} 0 < K < 4 & : \text{実数解 (D < 0)} \\ K = 0, 4 & : \text{重解 (D = 0)} \\ K < 0, 4 < K & : \text{虚数解 (D > 0)} \end{cases} \quad (8)$$

となる。

この K 値が実数解のとき、すなわち $0 < K < 4$ のときのみ粒子は閉じ込められる。Figure 6, 7 に実数解と虚数解のときの粒子挙動を示す。

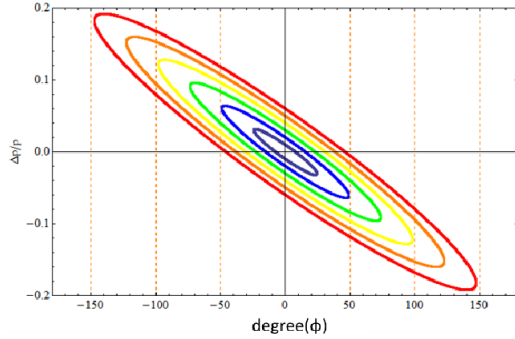


Figure 6: K = 3.6102.

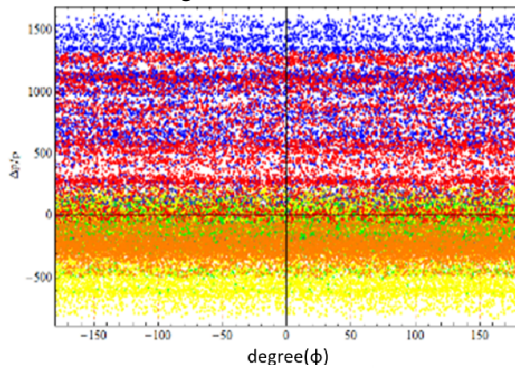


Figure 7: K = 8.0238.

3. 位相空間軌道とエミッタンス増大

階段関数の場合には疑似 Chaos と見られる軌道が見られるので、粒子集団の場合にはビームの拡がりが見られる。粒子の初期分布を図 8 のように与え、(1)式より求められる粒子挙動とターン毎の縦方向エミッタンスについて Figure 9,10 に示す。

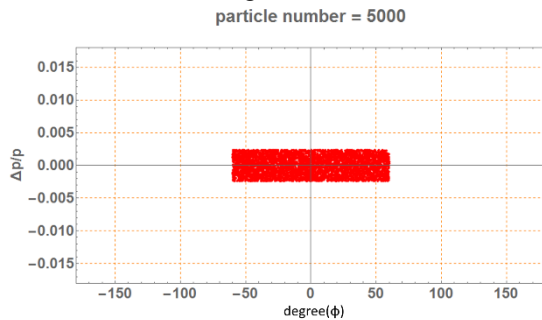


Figure 8: Initial distribution.

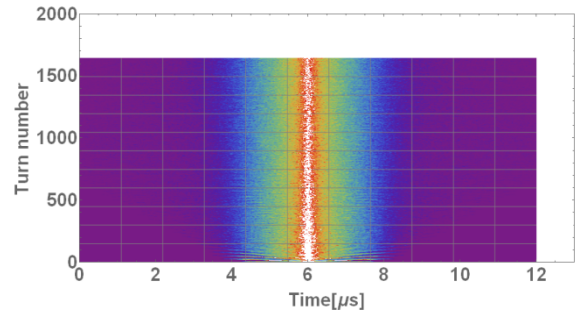


Figure 9: Particle distribution in time every turn. また、エミッタンス評価は以下の式から算出した。

$$\begin{aligned} \overline{s^2} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i^2, \\ \overline{(E + \Delta E)^2} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E + \Delta E)_i^2, \\ \overline{s \cdot (E + \Delta E)} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i \cdot (E + \Delta E)_i \end{aligned} \quad (9)$$

粒子数 95%をエミッタンスとすると以下のようになる。

$$\varepsilon = 2\sigma_s \cdot 2\sigma(E + \Delta E) \quad (10)$$

以上より

$$\varepsilon = 4\sqrt{\overline{s^2} \cdot \overline{(E + \Delta E)^2} - (\overline{s \cdot (E + \Delta E)})^2} \quad (11)$$

となる。

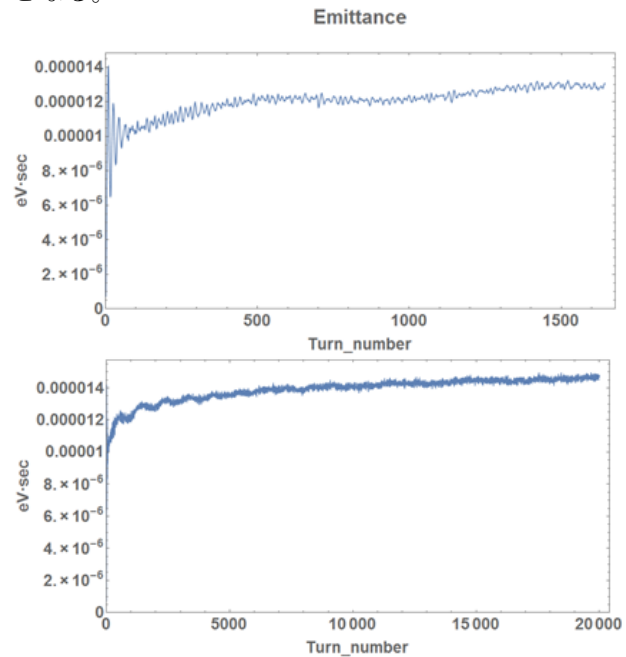


Figure 10: Emittance growth.

4. 実験結果との対比

はじめに述べたように、KEK デジタル加速器では様々な条件でバリアー電圧を作成することが可能である。今回は、実際に実験で使用した電圧波形を取

り込み、図 8 のように与えた初期分布で実験結果とシミュレーションの対比を行った。図 11 から図 13 までは、バリアー電圧を 1.0kV から 1.2kV までの電圧高さとして実験を行った。図 11 より、ビームに偏りが生まれるとエミッタンスは線形的に増大していくことがわかる。これは、位相空間構造上からわかるように $\Delta p/p$ が高くなる粒子が増えるためである。また、粒子は位相空間構造が膨らんでいるところに大局的に偏るため図 11 から図 15 までに示すように閉じ込め電圧波形高さのバランスを保つことでよりエミッタンスの低いビームを作ることが出来る。

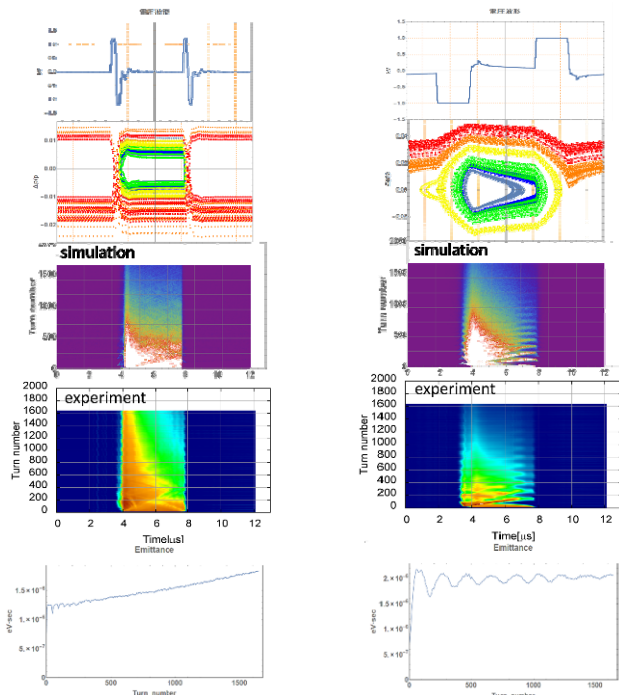


Figure 11: From upper to bottom
Barrier voltage profile with reflections
Phase space structure
Bunch evolution in turn (Simulation)
Bunch evolution in turn (Experiment)
(parameters: $t_f = 200$ nsnsec and $V_{bb} = 1.2$ kV).

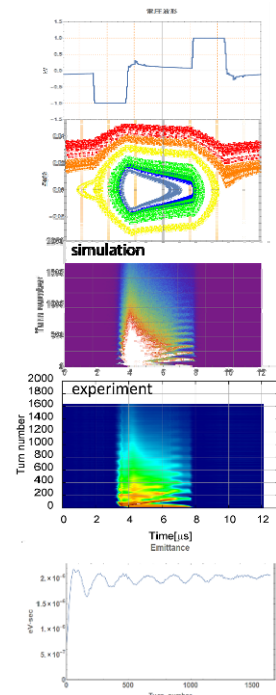


Figure 12: From upper to bottom
Barrier voltage profile with some over-shoot in the flat region
Phase space structure
Bunch evolution in turn (Simulation)
Bunch evolution in turn (Experiment)
(parameters: $t_f = 2$ μ sec and $V_{bb} = 1.0$ kV).

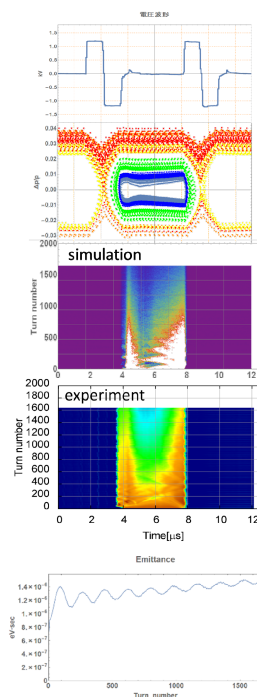


Figure 13: From upper to bottom
Barrier voltage profile with long over-shoot
Phase space structure
Bunch evolution in turn (Simulation)
Bunch evolution in turn (Experiment)
(parameters: $t_f = 1$ μ sec and $V_{bb} = 1.2$ kV).

次にバリアー電圧を 5 V と 50 V とし、 t_f の幅を 4 μ sec として行った実験結果を示す。図 14 に 5 V と云う超低電圧での粒子閉じ込めを示す。バリアー電圧領域への深い染み込みが顕著である。バケツ形状と入射ビームの位相空間上のミスマッチによって生じるビームエンベロープの振動数も含め、シミュレーションと実験結果は良く一致している。また、低電圧の場合、高電圧に比べエミッタンスの値が小さく安定していることがわかる。これは閉じ込め電圧高くなると粒子が大きく散乱し、エミッタンスが上昇するからだと考えられる。

次にエミッタンスの変化の高さ依存性を検証してみた。

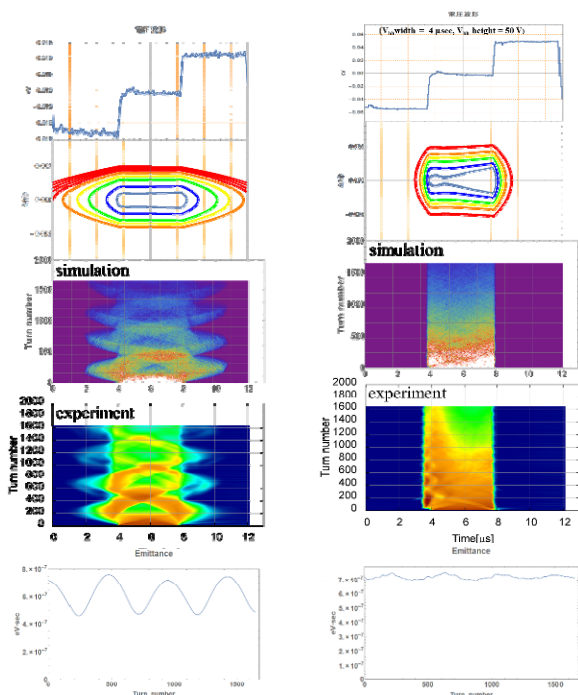


Figure 14: Extremely low voltage confinement
Barrier voltage profile
Phase space structure
Bunch evolution in turn (Simulation)
Bunch evolution in turn (Experiment)
(parameters: $t_f = 4 \mu\text{sec}$ and $V_{bb} = 5 \text{ V}$)

Figure 15: Low voltage confinement
Barrier voltage profile
Phase space structure
Bunch evolution in turn (Simulation)
Bunch evolution in turn (Experiment)
(parameters: $t_f = 4\mu\text{sec}$ and $V_{bb} = 50 \text{ V}$)

また、図 3 の t_f の幅を 500 nsec とし、電圧 V_{bb} を変化した場合のエミッタンスの増大の違いを図 16 に示す。これより、エミッタンスの増大には閉じ込め電圧の波形だけではなく、印加電圧高さも影響を及ぼすことがわかる。粒子に与える閉じ込め電圧は最適な電圧を与えることで低エミッタンスのビームを作成できると考えられる。

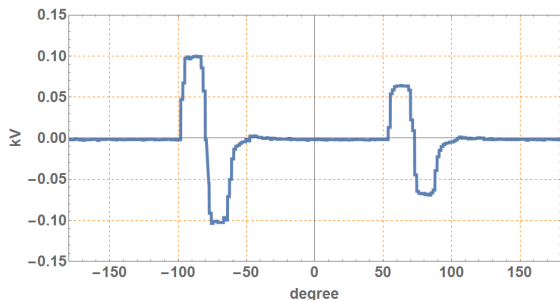


Figure 16: Waveform of applied voltage.

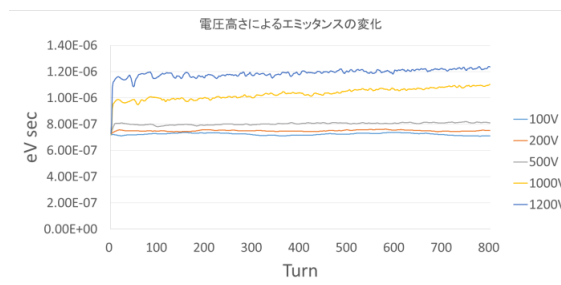


Figure 17: Emittance growth.

結論

バリアー電圧閉じ込めの力学について議論を展開した。個々の粒子軌道とマクロ粒子を用いたエミッタンスの変動に関する相関から、実際の粒子閉じ込め電圧波高の選択に有益な情報を得た。シミュレーションによる粒子挙動の解析を閉じ込め実験結果の解釈に用いた。

参考文献

- [1] J.Griffin, C.Ankenbrandt, J.MacLachlan, and A.Moretti, "Isolated Bucket RF Systems in the Fermilab Antiproton Facility", IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-30, 3502 (1983).
- [2] M. Blaskiewicz and J. Brennan, "A Barrier Bucket Experiment for Accumulating De-bunched Beam in the AGS", Proc. of EPAC1996, 2373 (1996).
- [3] C.M.Bhat, "Applications of Barrier Bucket RF Systems at FERMILAB", Proc. of Int. Workshop on Recent Progress in Induction Accelerators, Tsukuba, 45 (2006).
- [4] K.Takayama et al., "Experimental Demonstration of the Induction Synchrotron", Phys. Rev. Lett. 98, 054801 (2007).
- [5] K.Takayama T.Yoshimoto, Liu Xingguang et al., "Induction Acceleration of Heavy Ions in the KEK Digital Accelerator: Demonstration of a Fast-Cycling Induction Synchrotron", Phys. Rev. ST-AB 17, 010101 1-6 (2014).
- [6] T.Yoshimoto et al., "デジタル加速器における可変誘導電圧を用いた加速システム", in this conference
- [7] B.V.Chirikov, "Universal Instability of Many Dimensional Oscillator Systems", Physics Report 52, 261-379 (1979).
- [8] K.R.Symon and A.M.Sessler, "Methods of Radio Frequency Acceleration in Fixed Field Accelerators with Applications to High Current and Intersecting Beam Accelerators", CERN Symp. Proc. 1, 279 (1956).