

## 位相雑音によるビームエネルギー変動の評価

### EVALUATION OF BEAM ENERGY FLUCTUATION CAUSED BY PHASE NOISE

花木博文<sup>#,A)</sup>, 安積隆夫<sup>B)</sup>, 大島隆<sup>B)</sup>, 小林利明<sup>A)</sup>, 鈴木伸介<sup>A)</sup>, 谷内努<sup>A)</sup>, 出羽英紀<sup>A)</sup>, 馬込保<sup>A)</sup>,  
水野明彦<sup>A)</sup>, 柳田謙一<sup>A)</sup>

Hirofumi Hanaki<sup>#,A)</sup>, Takao Asaka<sup>B)</sup>, Takashi Ohshima<sup>B)</sup>, Toshiaki Kobayashi<sup>A)</sup>, Shinsuke Suzuki<sup>A)</sup>,  
Tsutomu Taniuchi<sup>A)</sup>, Hideki Dewa<sup>A)</sup>, Tamotsu Magome<sup>A)</sup>, Akihiko Mizuno<sup>A)</sup>, Kenichi Yanagida<sup>A)</sup>

<sup>A)</sup> Japan Synchrotron Radiation Institute

<sup>B)</sup> Riken SPring-8 Center

#### Abstract

The stability of RF signal sources is quite important for accelerators which have to provide very high quality beams. The RF sources for XFELs, for example, have to satisfy the integrated phase fluctuation less than several tens femtoseconds. The SSB noises of RF reference signal dominate the short-term instabilities of the RF phase of the carrier RF. This phase modulation finally results in the beam energy fluctuation. This presentation gives a quantitative evaluation of the beam energy fluctuations in an electron linear accelerator caused by phase noises comparing a theoretical analysis and experimental results: A simple model, which represents actual RF phase transmission in transmission lines of an electron linac, was introduced to understand how phase noises result the relative phase deference between a beam bunch and accelerating RF fields. In the experiments, we measured the enhanced beam energy fluctuations by modulating the phase of the reference RF signals with an external signal.

#### 1. はじめに

近年、位相雑音の非常に小さい発振器を入手し易くなり、最初から注意して低レベル RF 系を設計しておれば、位相雑音が原因でビームエネルギー変動が問題になる事はほとんど無いと言え、むしろクライストロン電源の安定度の方がより重要であろう。

しかし、XFEL のように数十フェムト秒以下の高精度を要求する場合<sup>[1]</sup>や、発振器の発振タイミング制御のために、位相雑音の大きいデジタル任意波形発振器を採用する事例では<sup>[2]</sup>、位相雑音の影響をある程度正確に見積りたい状況もあると考えられる。

実際 SPring-8 では後者の発振器を以前から採用していることもあり、筆者らは位相雑音がビーム与える影響を調べようと、マスター発振器に強制的に位相変調をかけてエネルギー変動を観測する予備的な実験を過去に行っている。この実験では、周波数帯域の広い雑音だけでなく様々な周波数の正弦波による位相変調を試み、周波数によってビームエネルギー変動が異なる事などを見いだした。この実験をベースに、位相変調によるエネルギー変動の仕組みを明らかにしたいというのが、今回の研究である。

本研究では、まず CW あるいはロングパルスの常伝導電子リニアックについて、位相雑音の相互干渉がどのように起こりうるのかを計算する。続いて CW ではないが SPring-8 1-GeV リニアックについて、伝送線路や各 RF 機器の電気長および位相特性を考慮して位相雑音の相互干渉を計算し、さらに同リニアックのマスター発振器に位相変調をかけて強制的に大きな位相雑音を生成させることにより、大きなビームエネルギー変動を起こして雑音との相関を調べる。

<sup>#</sup> hanaki@spring8.or.jp

#### 2. 位相雑音によるビームエネルギー変動

##### 2.1 位相雑音の干渉性

位相雑音による位相変動は一見無秩序な現象に見える。従って発振器から出力された後に分岐された二つの雑音信号が、別々の異なる電気長を有する経路を伝搬して時間差を持って再度合流する場合を考える時、それぞれの雑音信号は無秩序なのだから正弦波のような干渉性を持たないと考えたくなる。

はたしてそうであろうか。無秩序な信号であってもフーリエ変換して無数の周波数成分に分解し、それぞれの周波数成分に注目すると、少なくともミリ秒程度以下の時間は十分に安定な正弦波であり干渉性を持つと考えるべきである。しかも実際の増幅回路や加速管には制限された透過帯域があるために、無秩序性は帯域幅に応じて減衰してしまう。

すなわち、位相変動が無秩序に見える複雑な時間変化をしていても、少なくともミリ秒以下の時間ではそれぞれの周波数成分は十分良い近似で安定な正弦波であり、互いに干渉性をもつと考えられる。この考えが、本研究の出発点である。

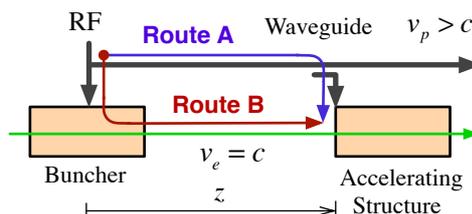


Figure 1: Simplified model of electron linac.

Figure 1 は、複数の加速管を有する電子リニアックを、RF 位相にのみ着目して簡略化したモデルの

一つである。ここでは増幅器も無視している。このモデルでは、上記したように位相雑音による位相変動が安定な正弦波の重ね合わせであるとしよう。

もし伝送線を伝搬する RF の位相速度が周波数に依らず電子と同じく光速ならば、Figure 2 の電気長差  $\Delta A$  はほぼゼロである。さらにバンチャと加速管の周波数特性が同じならば、どの加速管の入口でも加速 RF の位相変動はビームがバンチャで受けたタイミングジッタと全く同じ量だけおこる。すなわちマスター発振器の位相雑音に起因する RF の位相変動は、ビームエネルギーに寄与しない。しかし伝送線路に分散がある場合は、電気長差  $\Delta A$  は周波数に依存した値を取り、その絶対値はビームが下流に走るほど大きくなり、Figure 2 の右図のように加速管位置に応じた相対的位相差が発生するはずである。

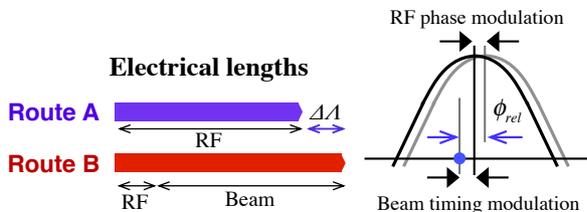


Figure 2: Relative phase modulation caused by the electrical path difference  $\Delta A$  which depends on the RF frequency due to the dispersion of the transmission line.

この干渉現象を調べるには、帯域の広い雑音を対象にするのではなく、単一周波数の正弦波による RF 位相変動を与えて、ビームと加速 RF の相対位相変動を調べるのが最適である。その合理性は、実際の位相雑音を作る位相変動は様々な周波数の正弦波の合成である、という仮定に依る。

## 2.2 位相雑音

微小な振幅変動  $\delta a$  および位相変動  $\delta\phi$  を持つ振幅 1 の RF キャリア信号  $C$  は、次のように記述できる。

$$C = (1 + \delta a)e^{j(\omega_0 t + \delta\phi)} \\ \approx e^{j\omega_0 t} + \delta a e^{j\omega_0 t} + j\delta\phi e^{j\omega_0 t}$$

上式の第 3 項は  $j\exp(j\omega_0 t)$  を含み、キャリアベクトル  $\exp(j\omega_0 t)$  に直角な位相変動ベクトルである。

任意の時間関数である位相変動  $\delta\phi$  は、フーリエ変換する事により連続するフーリエ周波数の関数  $\times$  三角関数の積分として記述できる。そこで、一つのフーリエ周波数、すなわちキャリア信号に対するオフセット周波数  $\omega_m$  を持つ位相変動成分  $\phi_m$  を考える。

この位相変動成分  $\phi_m$  が作るノイズベクトルを  $\delta n_\phi$  とすると、

$$\delta\phi = \phi_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \\ \delta n_\phi = j\phi_m \sin(\omega_m t + \theta_m) e^{j\omega_0 t} \\ = \frac{1}{2}\phi_m \left( e^{j((\omega_0 + \omega_m)t + \theta_m)} - e^{j((\omega_0 - \omega_m)t - \theta_m)} \right) \quad (1)$$

ここで、 $\theta_m$  は位相変動の初期位相である。以降、

位相雑音による変調を考えるとき、無秩序なのはこの初期位相だけであると仮定する。

式(1)の意味する事は次の通り。Figure 3 のようにキャリアベクトルに乗って観測する時、半時計回りに周波数  $\omega_m$  および時計回りに  $-\omega_m$  で回転する二つのノイズベクトルが、キャリア RF 信号の先端で合成されてキャリアベクトル先端に直角で位置し、絶えず長さが正弦関数として変動する。その結果、角周波数  $\omega_0$  で半時計回りに回転するキャリアベクトルの位相が絶えず振幅  $\phi_m$  で変調されることになる。

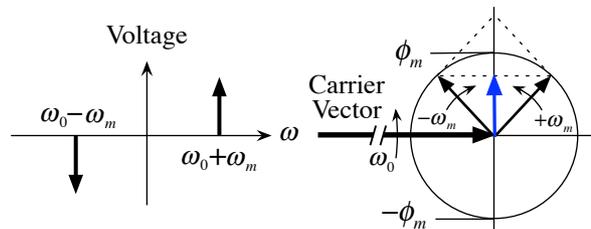


Figure 3: Phase modulation vector (blue) composed of two rotating RF vectors  $\omega_0 + \omega_m$  and  $\omega_0 - \omega_m$ .

尚、通常は位相雑音の電力分布を SSB(Single Side Band)位相雑音  $L(f)$  として次式のように定義する。これは、式 (1) 中のオフセット周波数が正の成分が作る電力分布である。

$$L(f) \equiv \frac{\text{phase noise power density in single sideband}}{\text{total carrier power}} \quad (\text{dBc / Hz})$$

そしてある周波数範囲の位相雑音が寄与する位相変動  $\Phi_{rms}$  は、次式のようになる。

$$\Phi_{rms}^2 = 2 \int_{f_1}^{f_2} L(f) df$$

## 2.3 位相雑音の伝搬

以降、加速 RF を CW あるいは RF パルス幅が十分に長いとして考える。

位相雑音はキャリア信号とともに、発振器から出力されて伝送線を伝搬し、途中分岐素子や移相器、増幅器を経由してバンチャや加速管に到達する。

式(1)であらわされる位相変動ノイズが伝送線路を  $z$  方向に伝搬するとき、伝搬の項を含む式は次の通りである。

$$\delta n_\phi(\omega_m, z) = \frac{1}{2}\phi_m \left( e^{j((\omega + \omega_m)t - k_m^+ z + \theta_m)} - e^{j((\omega - \omega_m)t - k_m^- z - \theta_m)} \right) \quad (2)$$

ただし、加速管の中のように、伝送線路の位相速度が線路上で一定でない場合は、次のように積分に置換する必要がある。

$$k_m^+ z \rightarrow \Lambda(\omega_m, z) = \int_0^z k_m^+(z) dz, \\ k_m^- z \rightarrow \Lambda(-\omega_m, z) = \int_0^z k_m^-(z) dz.$$

さて、電子銃から出たビームはバンチャによりその時の RF 位相で決まるタイミングにバンチャを

れる。すなわち、RF の位相変動は、ビームタイミングの変動そのものである。オフセット周波数  $\omega_m$  の信号に対するバンチャの周波数特性を  $F_{bun}(\omega_m)$ 、および RF 源からバンチャまでの伝送路電気長を  $A_{bun}$  とすると、位相雑音ベクトル  $\delta n_\phi$  は、式(2)に RF 源からバンチャまでの電気長を組み入れて得られる。

$$\delta n_{beam\phi} = \frac{1}{2} \phi_m \begin{pmatrix} F_{bun}(\omega_m) e^{j(\omega_0 + \omega_m)t_{bun} - A_{bun}(\omega_m) + \theta_m} \\ -F_{bun}(-\omega_m) e^{j(\omega_0 - \omega_m)t_{bun} - A_{bun}(-\omega_m) - \theta_m} \end{pmatrix}$$

一方、ある時刻  $t$  および加速管入り口から  $z$  の位置での加速 RF の位相雑音ベクトル  $\delta n_\phi$  は、オフセット周波数  $\omega_m$  の信号に対するクライストロンの周波数特性を  $F_{kly}(\omega_m)$ 、および RF 源からバンチャまでの伝送路電気長を  $A_{rf}$  とすると、加速管中の RF 伝搬の項を含む次式のように表せる。

$$\delta n_{accr\phi} = \frac{1}{2} \phi_m \begin{pmatrix} F_{kly}(\omega_m) e^{j(\omega_0 + \omega_m)t - k_m z - A_{rf}(\omega_m) + \theta_m} \\ -F_{kly}(-\omega_m) e^{j(\omega_0 - \omega_m)t - k_m z - A_{rf}(-\omega_m) - \theta_m} \end{pmatrix}$$

#### 2.4 進行波管内での位相変動

SPring-8 リニアックは、バンチャは定在波空洞を、主加速部は進行波管を採用している。

定在波空洞は、その負荷  $Q$  値等によって決まる帯域幅と位相特性を有している。

一方、進行波管は RF の周波数により異なる群速度  $v_g$  および位相速度  $v_p$  を持つ。しかも、それが加速管内の上流から下流にわたり連続的に変化する。Figure 4 は、SPring-8 リニアックで使用されている加速管の分散関数を  $\omega = \omega_{mode} [1 + k(1 - \cos\theta)]$  なる近似式を用いて求めた位相速度である。

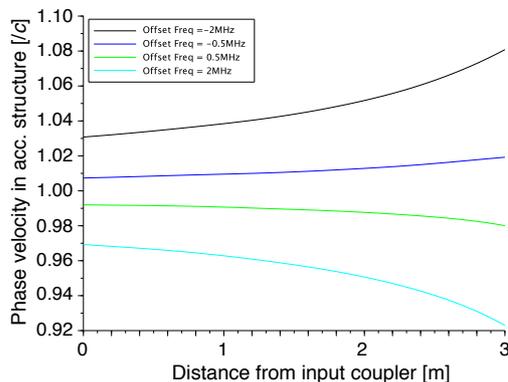


Figure 4: Phase velocities of RF waves travelling in the B-type accelerating structure used at the SPring-8 linac.

進行波管では、キャリア周波数 2856 MHz を持つ RF はビームと同じく光速  $c$  で伝搬すべく製作されているが、オフセット周波数が大きくなるとその位相速度は光速から離れ (Figure 4 参照)、雑音 RF とビームは加速管を通過中に位相スリップを起こすようになる。すなわち、キャリア RF に雑音が合成された加速 RF は、加速管を走行中の光速のビームから見ると、相対的 RF 位相は少しずつ動いて行く。

従って、光速で走行する電子が経験する位相変動を正しく評価するには、位相雑音を電子に乗って積分する必要がある。バンチャで位相変動を受けていない電子が加速管に突入する時刻を  $t_a$  とすると、加速管内で経験する位相変動は  $\delta n_{accr\phi}$  を次式によって管内軸上で積分すれば良い。

$$\overline{\delta n_{accr\phi}} = \frac{1}{L_{acc}} \int_0^{L_{acc}} \delta n_{accr\phi}(t_a + z/c, z) dz$$

従って、ビームが加速管内を 1 回通過する間に経験する相対的位相変動  $\delta\phi_{rel}$  は次式で与えられる。

$$\delta\phi_{rel} = \text{img}(\overline{\delta n_{accr\phi}} - \delta n_{beam\phi}) \quad (3)$$

尚、上式の  $\delta\phi_{rel}$  は初期位相  $\theta_m$  の関数である。

位相変動がゼロの時のキャリア信号ベクトルは、バンチャ内でも加速管内でも実数成分しか持たない (すなわちオンクレスト加速) ように、伝送路に含まれる位相器の位相等を選ぶため (計算上はとても重要である)、計算式中の位相変動ベクトル  $\delta n_\phi$  は通常はほとんど虚数成分しか持たない。

### 3. モデル加速器による干渉特性の計算

CW 正弦波による位相変動を RF に与え、加速管を通過するビームがどのように位相変動を受けるのかを Figure 1 のモデルを使って調べる。

ここでは、以下の条件でシミュレーションを行う。

- キャリア RF (加速 RF) は CW (2856MHz)
- キャリア RF に、50 kHz, 500 kHz, 2 MHz のスプリアス信号 (正弦波) による振幅 1 度の位相変動を与える
- バンチャ: 定在波型 ( $Q_i=0\sim 5300$ )
- 加速管: 進行波型 (全長=0~3m)、全長=0 は加速管の分散 ( $v_p \neq 0$ ) を無視しどの周波数でも  $v_p = 0$  とする事を意味する。
- RF 伝送路: 最短長の導波管のみ
- RF はバンチャ入口で二分岐され、一方はバンチャ空洞を励振し、他方は導波管を伝搬して下流の加速管に到達しビームを加速する。
- クライストロンは影響が小さいので無視する。

このモデルでは、ビームはバンチャ内でバンチングされるが、そのタイミングは位相変動のために変動する。バンチャを出たビームは光速で下流に向かって走るが、導波管を伝搬する加速 RF の位相速度は、導波管の分散特性のためにキャリア RF とスプリアスは位相速度が互いに異なるため、加速管ではスプリアスはバンチャとは異なる位相でビームに変調を掛ける事になる。

以下、バンチャ、加速管の特性を考慮しない最も単純な場合から初めて、考慮する機器の特性を少しずつ増やしながらか、どのように実効的な位相変動が起こるのかを式(3)により計算し、その結果を示す。

#### 1) バンチャ、加速管の特性を考慮しない場合

この場合、バンチャ空洞の  $Q_i=0$ 、加速管長=0 す

なわち  $v_p = 0$  として計算した。Figure 2 のようにバンチャでビームがもらった位相変動（タイミング変動）は、加速器の上流部では加速 RF も同じような位相変動を持っているため実効的には相殺されてしまう事が良く分かる。しかし下流側に行くほど、そして変調周波数が高いほど、導波管の分散特性のために相殺されなくなり、例えば 2MHz の位相変動の場合は互いに逆位相となり二倍に強調されてしまう。

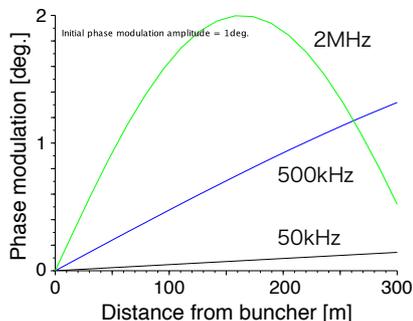


Figure 5: Relative phase modulation amplitudes experienced by a beam bunch are presented as functions of the distance from the buncher when the initial modulation of 50kHz, 500kHz, and 2MHz is 1 degree. Assuming that the buncher has no frequency response and the accelerating structure has no dispersion. The growth of the relative phase modulation is resulted by the dispersion of the RF transmission line.

#### 2) バンチャの特性だけを考慮する場合

バンチャの  $Q_L$  が大きいほどバンチャの帯域は狭くなり位相シフトも大きい。バンチャでの減衰が大きいほどバンチャでの変調が小さくなり、加速管での干渉量は小さくなる。空洞による位相シフトが大きいほど、変調最小地点がバンチャより遠くなる。

Figure 6 はバンチャ空洞の  $Q_L$  を 0 から 500, 2000 と増やした例であり、上記の特性が良く分かる。

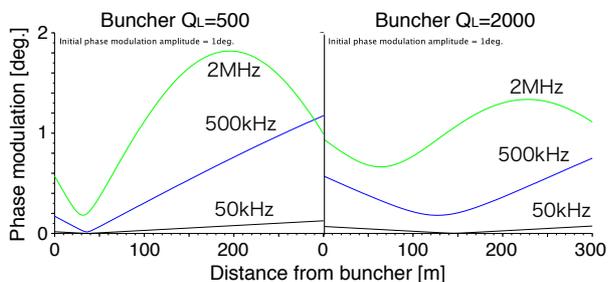


Figure 6: Relative phase modulation when the frequency response of the buncher is taken account.

#### 3) 加速管の特性だけを考慮する場合

2-4 で述べたように、周波数がキャリア周波数と異なるスプリアスは位相速度が光速ではない。そのためビームが加速管内を走行中にビームが乗っている RF 位相が少しずつ動く現象が起きる。当然の事ながらこの効果は加速管長が長いほど顕著となる。加速管長を 1m, 3m と変えて計算した結果が Figure 7 である。加速管長が長くなると、2MHz の変調では加速管内をビームが走り抜ける間にビームの乗る位相が±両方向に移動するために、相対位相の場所依

存性が小さくなる事が図から良く分かる。

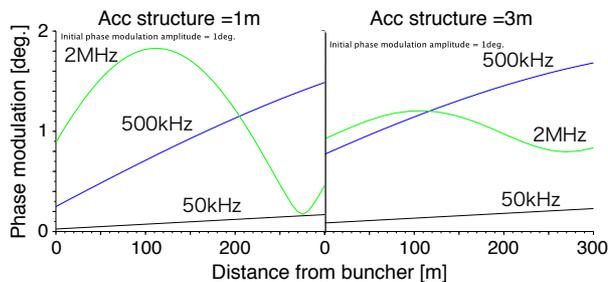


Figure 7: Relative phase modulation when the phase velocities in the accelerating structure is taken account.

#### 4) バンチャおよび加速管の特性を考慮する場合

Figure 8 では、加速管特性の効果、そしてバンチャおよび加速管の位相変動が相殺する効果等のために、相対的位相変動はかなり小さくなっている。

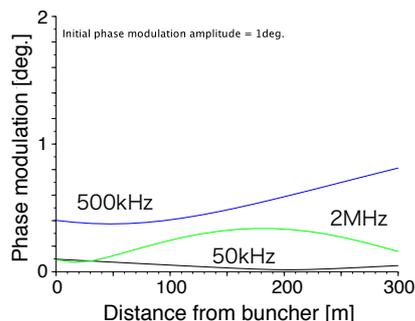


Figure 8: Relative phase modulation when the buncher and the accelerating structure are taken account.

## 4. 実例：SPring-8 リニアック

### 4.1 エネルギー変動の予想

現実の加速器では、導波管だけでなく種々の同軸線路が使用され途中に移相器や減衰器、増幅器等が設置されて複雑であるが、SPring-8 リニアックの出来るだけ現実に近いモデルを作って計算を試みた。

ただしバンチャ空洞は、単純な LC 共振回路により表現しているが、実機ではカップリングの調整等でやや複雑な周波数特性になっている可能性がある。

Figure 9 の実線で結んだグラフは3章と同じく相対的位相変動を計算した結果である。この図から、

- 500kHz~2MHz の位相変動は、下流ほどエネルギー変動への寄与が大きくなる
- 100kHz 以下および 4MHz 以上の位相変動はエネルギー変動への寄与が小さい

などが見て取れる。

ビームエネルギー変動の計算は、モンテカルロ法により行う。具体的には式(3)中の初期位相  $\theta_m$  をランダムに振って各  $\omega_m$  に対応する  $\delta\phi_{rel}$  を求める。 $\omega_m$  が分布を持つ場合は、 $\delta\phi_{rel}$  を積算する。

### 4.2 実験

実際のエネルギー変動が予想通りの振る舞いを示すのかどうか知るために次の方法で実験を行った。

- マスター発振器に外部変調信号を入力し、強制的に位相変調を与えた
- 外部変調信号は、正弦波(500kHz, 1MHz, 2MHz)および帯域制限した人工雑音(400-600kHz)
- 特定の加速管(今回は、M2, M10, M16)を選び、それぞれゼロクロス位相でビーム加速して、位相変動をエネルギー変動にリニアに変換して測定した
- 加速RFはCWではなく幅 $2\mu\text{s}$ のRFパルス
- 位相雑音はシグナルアナライザ(Agilent E5052B)により測定

実験で得られたエネルギー変動のヒストグラムから、相対位相変調の振幅を逆算した値を Figure 9 にプロットした。さらに、エネルギー変動について、実験結果とモンテカルロ法による計算結果を変調周波数 500kHz (正弦波と 400-600kHz 雑音)について Figure 10 に比較した。その結果の要点は、

- Figure 9 によれば、エネルギー変動測定値は、位相変調周波数が 500kHz と 1MHz の場合に明らかな場所依存性を示している。
- Figure 9, 10 に示す 500kHz 近傍ノイズによる変調でも、加速管の位置により変動幅が明らかに異なり、干渉効果を示唆していると思われる。
- エネルギー変動実測値を計算値と比べると、変調周波数 500kHz で約二倍、1MHz では約三倍大きい、原因の解明は未了である。

## 5. 結論

単一周波数の正弦波による位相変調を RF に与える場合、伝送線路の分散、バンチャおよび加速管の特性により、加速管位置によって異なるエネルギー変動が現れることがモデルで示された。

一方、実験によるエネルギー変動は、位相変調源が単一周波数でも雑音でも、明らかな加速管位置による依存性が見られ、バンチャによるビームのタイ

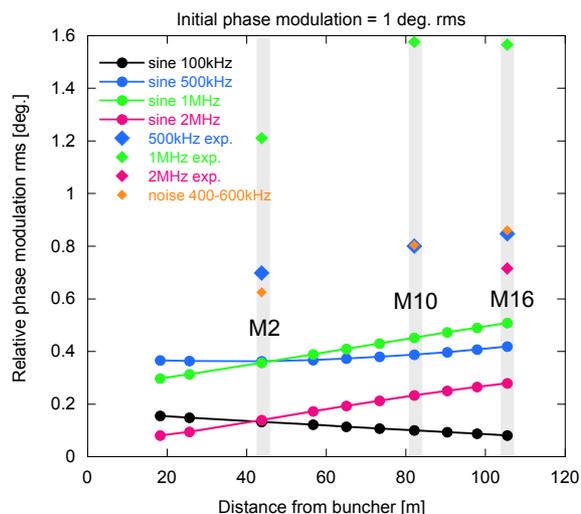


Figure 9: Relative phase modulation along the SPring-8 linac when the initial modulation is 1 deg. in rms. The solid circles are the simulated results and the solid diamonds express the experimental values. M2, M10 etc. are the names of the accelerator sections of the linac.

ミング変動と加速 RF の位相変動との相関が伺える。しかしそれら測定値は計算値より二〜三倍大きい。計算モデルの不備、あるいはモデルに入力したパラメータに間違いのある可能性があり、検討調査を継続すべき課題である。また RF がパルスの場合の効果は今後も検討を行う予定である。

## 参考文献

- [1] Y. Otake, Proc. of FEL2011, Shanghai, China (2011) pp.633-640.
- [2] Y. Kawashima, et al., Phys. Rev. ST-AB, volume 4, 082001(2001).

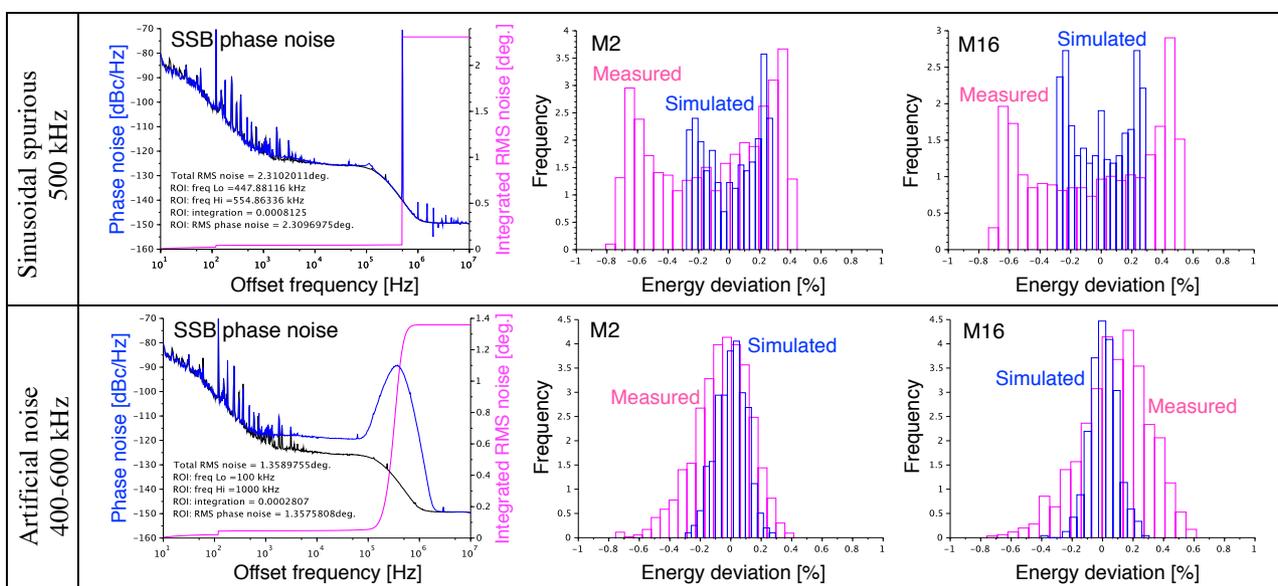


Figure 10: Measured and simulated energy deviations at M2 and M16 caused by forced phase modulations. The Energy fluctuations observed at M16 (downstream) are clearly larger than that observed at M2 (upstream).