

六極電磁石用ハーモニクコイルの最適化

OPTIMIZATION OF A HARMONIC COIL FOR THE FIELD MEASUREMENT OF SEXTUPOLE MAGNETS

妻木孝治[#], 深見健司, 中西辰郎
Koji Tsumaki[#], Kenji Fukami, Tatsuro Nakanishi
JASRI/SPring-8

Abstract

The magnetic field of sextupole magnets used in the Ultra-low Emittance Storage Ring (UESR) for synchrotron radiation sources is very strong compared with the conventional one. The absolute values of higher harmonics of such a high gradient magnet become large in proportion to the main field. Moreover, the pole pieces of the magnet are saturated and stronger higher harmonics are generated. As the sextupole magnets control the dynamic aperture and the dynamic aperture of the UESR is very small due to the strong sextupole magnets, we need to measure the higher harmonics precisely as well as the main field. The optimum coil arrangement of radial harmonic coil to suppress the spurious higher harmonics of the sextupole magnets was studied by the simulation. Assuming the two coils, we determined the coil positions of two coils that have no sensitivities to quadrupole and sextupole fields and have maximum sensitivities to octupole and decapole fields. We also studied the coil position for the measurement of main field. To reduce the spurious main field, the coils are arranged to have no sensitivity to quadrupole field and maximum sensitivity to sextupole fields.

1. はじめに

現在世界各地で次世代の回折限界を目指した超低エミッタンス蓄積リング UESR がさかんに検討されている^[1]。UESR の六極電磁石は極めて強く、そのためダイナミックアパーチャが従来に比べて極めて小さい。従って適当な大きさのダイナミックアパーチャをいかに確保するかが UESR 成功の鍵となる。このダイナミックアパーチャを決めているのが六極電磁石で、その磁場測定は大変重要なものとなる。

SPring-8 でも回折限界を目指して、次期計画の SPring-8-II が検討されており^[2]、六極電磁石の磁場強度は非常に強くなることが予想される^[3]。高ハーモニク磁場成分は、主成分に比例して強くなるだけでなく、鉄の飽和領域で使うためさらに強くなることが予想される。強いハーモニク成分は小さなダイナミックアパーチャをさらに小さくする可能性がある。そのため六極電磁石の磁場成分を主成分だけでなく、高ハーモニク成分も精度よく測定する必要がある。

従来、偏向電磁石や四極電磁石については見かけの磁場成分を含まず、実磁場成分だけ測定するブッキングコイルが使われている。しかしながら、六極電磁石についてはほとんど例がない。そこで本研究では六極電磁石についてコイルの軸ずれや読み出し誤差に起因する見かけの磁場に対しては不感で実磁場だけ感度よく測定する方法について検討したので、その結果について報告する。

2. ハーモニクコイルの出力

ハーモニクコイルの電圧出力は次のように表さ

れる^[4]。

$$V(t) = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} NLr_0\omega \left[\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^n - \left(\pm\frac{r_1}{r_0}\right)^n \right] C(n) \sin(n\omega t + n\delta - n\alpha_n) \quad (1)$$

ここで N はコイルのターン数、 L はコイルの長さ、 r_0 は任意のレファレンス半径、 ω は角速度、 r_1 と r_2 はコイル半径、 $C(n)$ と α_n は定数、 δ は角度の初期条件、 \pm の-は回転中心の反対側にコイル位置がある場合である。フラックスは電圧出力を積分して、

$$\begin{aligned} -\int V(t)dt = \Phi(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{NLr_0}{n} \left[\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^n - \left(\pm\frac{r_1}{r_0}\right)^n \right] C(n) \cos(n\theta - n\alpha_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} K_n C(n) \cos(n\theta - n\alpha_n) = \text{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} K_n C(n) e^{in(\theta - \alpha_n)} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

ここで K_n は、

$$K_n = \frac{NLr_0}{n} \left[\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^n - \left(\pm\frac{r_1}{r_0}\right)^n \right] \quad (3)$$

トランスバース方向の振動やねじれ方向の振動があるとフラックスは次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \text{Re} \left[K_n e^{in\theta} C(n) e^{-in\alpha_n} \right] \\ &+ \text{Re} \left[K_{n-1} e^{i(n-1)\theta} \frac{(n-1)D(\theta)}{r_0} C(n) e^{-in\alpha_n} \right] \\ &+ \text{Re} \left[inK_n T(\theta) e^{in\theta} C(n) e^{-in\alpha_n} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

ここで $D(\theta)$ は位置の誤差、 $T(\theta)$ は角度の誤差を示

[#] tsumaki@spring8.or.jp

す。角度の誤差は実際の角度誤差だけでなく読み出し誤差も含む。

3. 高ハーモニクス成分測定用コイル

3.1 最適化の方法

式 (4) から位置の誤差 $D(\theta)$ および角度の誤差 $T(\theta)$ があると見かけのフラックスが測定されてしまい、それは感受率 K_{n-1} と K_n に比例することがわかる。逆に位置の誤差に対しては K_{n-1} を、角度誤差に対しては K_n を零にすることで見かけのフラックスが零になり、実磁場だけを測定できることがわかる。

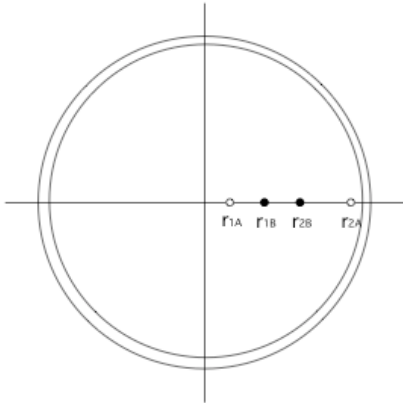


Figure 1: Harmonic coil (○ : coil A, ● : coil B).

長さ L 、ターン数 N_A と N_B のコイル A とコイル B を用いて、見かけのフラックスに対して不感となるように K_{n-1} と K_n を零にすることを考える。2 個のコイル感受率の差をとりこれを有効感受率と定義すると、有効感受率は次のようになる。

$$\begin{aligned} K_n^{eff} &= K_{nA} - K_{nB} \\ &= \frac{LN_A}{nr_0^{n-1}} \left[r_{2A}^n - (\pm r_{1A})^n \right] - \frac{LN_B}{nr_0^{n-1}} \left[(\pm r_{2B})^n - (\pm r_{1B})^n \right] \\ &= \frac{LN_A r_{2A}^n}{nr_0^{n-1}} \left[1 - \left(\pm \frac{r_{1A}}{r_{2A}} \right)^n \right] - \frac{N_B}{N_A} \left\{ \left(\pm \frac{r_{2B}}{r_{2A}} \right)^n - \left(\pm \frac{r_{1B}}{r_{2A}} \right)^n \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで r_{2A} はコイル A の外側の半径、 r_{1A} は内側の半径で、 r_{2B} はコイル B の外側の半径、 r_{1B} は内側の半径である。簡単のため式 (5) を次のように表す。

$$K_n^{eff} = A_n \left[1 - (\pm x)^n - N_r \left\{ (\pm y)^n - (\pm z)^n \right\} \right] \quad (6)$$

$$A_n = \frac{LN_A r_{2A}^n}{nr_0^{n-1}}, N_r = \frac{N_B}{N_A} \quad (7)$$

$$x = \frac{r_{1A}}{r_{2A}}, y = \frac{r_{2B}}{r_{2A}}, z = \frac{r_{1B}}{r_{2A}} \quad (8)$$

式 (4) より、六極電磁石における位置の誤差および角度の誤差から発生する高磁場ハーモニック成分は、四極成分 ($n=2$) と六極成分 ($n=3$) に対する感受率を零にすることで消え、実磁場成分だけ残る。しかしながら、そのままでは実磁場の高ハーモニッ

クス成分に対する感受率も小さくなってしまう。そこで四極成分と六極成分の感受率を零に保ったまま、高磁場ハーモニック成分に対する感受率を最大化するようなコイル配置を求める。すべての高ハーモニック成分の感受率を最適化することは難しいため、八極 ($n=4$) と十極成分 ($n=5$) のみ最大化するようにした。これは、電子蓄積リングにおいては、低次のハーモニクスほどビームへの影響が大きく、高次になるほど影響が小さくなるためである。ちなみに SPring-8 では八極に起因する 4 次の共鳴が観測され、入射効率を低下させている。

コイル配置は次の 3 ケースが考えられる。第 1 はコイル A、コイル B とも図 1 のように中心に対して同じ側にある場合 (ケース 1)、第 2 はコイル B がコイル A の反対側にある場合 (ケース 2)、第 3 は両コイルとも中心をまたいで、 r_{1A} 、 r_{1B} が r_{2A} 、 r_{2B} の反対側にある場合 (ケース 3) である。しかし第 2 のケースは四極成分と六極成分の感受率をともに零にすることはできない。そこで残りの 2 ケースについて考える。このとき四極から十極までの有効感受率は、次のようになる。

$$K_2^{eff} = A_2 \left[1 - (\pm x)^2 - N_r \left\{ (\pm y)^2 - (\pm z)^2 \right\} \right] \quad (9)$$

$$K_3^{eff} = A_3 \left[1 - (\pm x)^3 - N_r \left\{ (\pm y)^3 - (\pm z)^3 \right\} \right] \quad (10)$$

$$K_4^{eff} = A_4 \left[1 - (\pm x)^4 - N_r \left\{ (\pm y)^4 - (\pm z)^4 \right\} \right] \quad (11)$$

$$K_5^{eff} = A_5 \left[1 - (\pm x)^5 - N_r \left\{ (\pm y)^5 - (\pm z)^5 \right\} \right] \quad (12)$$

$K_2^{eff} = K_3^{eff} = 0$, $x, y, z < 1$ の条件のもと K_4^{eff} と K_5^{eff} を数値的に計算し、最適なコイル配置を求めた。

3.2 結果と検討

巻き数比 N_r が 1 から 10 の場合に対して、ケース 1、およびケース 3 について感受率を計算した。ケース 1、3 とも巻き数比が 1 の場合は解がなかった。図 2 は巻き数比が 2 の場合について、八極成分と十極成分の感受率が r_{2A} で規格化されたコイル位置 r_{1A} によりどのように変わるか、およびその時のコイル A とコイル B の位置関係がどのようになっているかを示したものである。巻き数比が 10 の場合の感受率、コイルの位置関係を図 3 に示す。巻き数比が増加すると感受率も増加するが増加率はわずかである。感受率の最大値と巻き数比の関係をプロットしたものを図 4 に示す。巻き数比を増しても感受率はほとんど増えないことがわかる。図 5、図 6 にケース 3 の場合の感受率とコイルの位置関係を示す。図 5 は巻き数比が 2 の場合、図 6 は 10 の場合である。この場合も同様に巻き数比が増加すると感受率も上がるが全体の傾向は、巻き数比が増加しても変わらない。八極成分の感受率が最大となる r_{1A} の位置での感受率と巻き数比の関係を図 7 に示す。

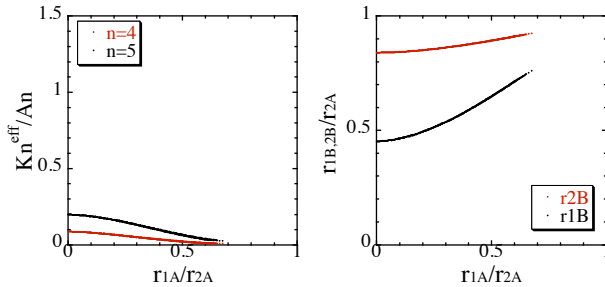
ケース 1 とケース 3 を比較してみると、ケース 3 の方がより感受率が高いことがわかる。そこでコイル位置はケース 3 の配置を採用する。また巻き数比

については、巻き数比を増しても感受率はそれに比例して増加するわけではない。むしろ巻き数比を増すより、巻き数比は小さいままで両コイルの巻き数を増やしたほうが、出力電圧はより大きくなり得策である。そこで巻き数比は2とした。次にこの時のコイルの位置関係をみると、 r_{1A}/r_{2A} が0.5近辺より小さいと r_{1B} が r_{1A} より大きくなり、コイルAとコイルBが交差する。そこで r_{1A}/r_{2A} は0.5より大きくするものとする。 r_{1A}/r_{2A} が増すに従って十極成分の感受率は上がるが、より重要な八極成分の感受率が下がってくる。したがって r_{1A}/r_{2A} をあまり大きくするのも得策でない。実際はハーモニックコイルの大きさ、コイルの巻き数、コイル線径などに応じて、 r_{1A}/r_{2A} が0.5から0.8位の間で決めるのが良いと思われる。以上の結果から高ハーモニック成分用ハーモニックコイルの有効感受率は、次のように表すことができる。

$$K_2^{eff} = K_3^{eff} = 0 \quad (13)$$

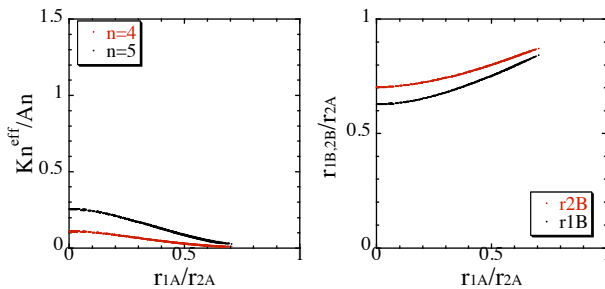
$$K_4^{eff} = \frac{LN_A r_{2A}^4}{4r_0^3} \left[1 - \left(\frac{r_{1A}}{r_{2A}} \right)^4 - 2 \left\{ \left(\frac{r_{2B}}{r_{2A}} \right)^4 - \left(\frac{r_{1B}}{r_{2A}} \right)^4 \right\} \right] \quad (14)$$

$$K_5^{eff} = \frac{LN_A r_{2A}^5}{5r_0^4} \left[1 - \left(\frac{r_{1A}}{r_{2A}} \right)^5 - 2 \left\{ \left(\frac{r_{2B}}{r_{2A}} \right)^5 - \left(\frac{r_{1B}}{r_{2A}} \right)^5 \right\} \right] \quad (15)$$



(a) Sensitivity (b) Coil position

Figure 2: (a) Effective sensitivities for octupole and decapole fields for the case of $Nr=2$. (b) Position relation of two coils. Coil A and B are the same side.



(a) Sensitivity (b) Coil position

Figure 3: (a) Effective sensitivities for octupole and decapole fields for the case of $Nr=10$. (b) Position relation of two coils. Coil A and B are the same side.

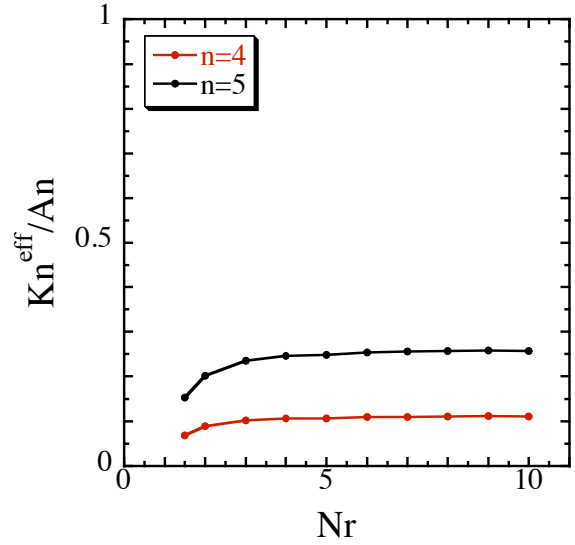
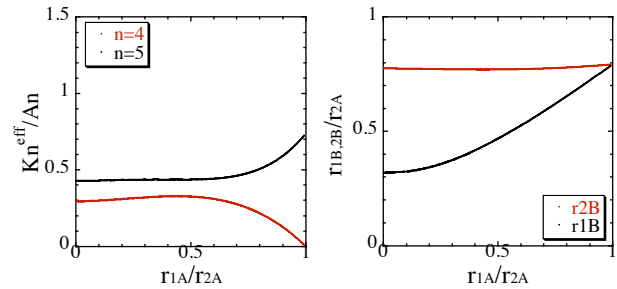
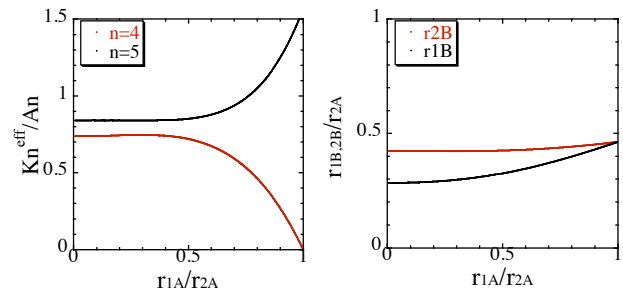


Figure 4: Relation between effective sensitivity and the ratio of turn number of two coils.



(a) Sensitivity (b) Coil position

Figure 5: (a) Effective sensitivities for octupole and decapole fields for the case of $Nr=2$. (b) Position relation of two coils. $r_{1A,B}$ and $r_{2A,B}$ are the opposite sides of the center.



(a) Sensitivity (b) Coil position

Figure 6: (a) Effective sensitivities for octupole and decapole fields for the case of $Nr=10$. (b) Position relation of two coils. $r_{1A,B}$ and $r_{2A,B}$ are the opposite sides of the center.

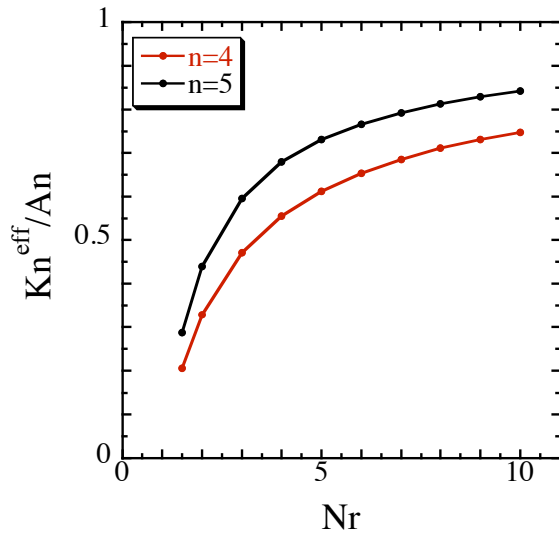


Figure 7: Relation between effective sensitivity and the ratio of turn number of two coils.

4. 主成分測定用コイル

式(4)より明らかなように位置ずれに対しては四極成分に対する感受率に比例して、角度誤差に対しては六極成分に対する感受率に比例して見かけ上の六極磁場成分が発生する。従って四極成分と六極成分に対する感受率を零にすれば、見かけの六極成分は測定されなくなる。しかし本来測定したい成分が六極成分なので、六極成分に対する感受率は零にすることはできず、逆に最大化する必要がある。従って、主磁場成分である六極成分を測定するためには、四極成分に対する感受率 $K_2^{eff} = 0$ の条件のもとで、 K_3^{eff} を最大化する。

2個のコイルの配置はこの場合も、高ハーモニックスの時と同様に3ケースが考えられる。しかしnが2の場合の感受率を零にして、一つ上のnが3の感受率を最大にするコイル配置は、計算するまでもなくケース2の2個のコイルが回転中心に対して反対側にある場合以外考えられない。また巻き数比も同じにするのが最も合理的である。また電圧出力を大きくするためには、2個のコイルは中心に対して対称にとり、外側のコイルは出来る限り外側に、内側のコイルは出来る限り回転中心に近づけるのが良い。このとき感受率は次のようになる。

$$K_2^{eff} = 0 \quad (13)$$

$$K_3^{eff} = \frac{2LN_A r_{2A}^3}{3r_0^2} \left[1 - \left(\frac{r_{1A}}{r_{2A}} \right)^3 \right] \quad (14)$$

5. まとめ

ハーモニックスコイルは精度の良い磁場測定の方法であるが、コイルの位置ずれや、角度誤差があると見かけの磁場まで測定されてしまう。この見かけの

磁場に対して不感の、六極電磁石用ハーモニックスコイルについて検討した。検討したのは、高ハーモニックス成分測定用のものと主成分測定用のものである。両者とも2個のコイルを仮定し、コイルの位置、コイルの巻き数を変えて、見かけの成分に不感で測定したい成分の感受率は大きくなるようなものを検討した。

高ハーモニックス成分測定用のものについては、四極成分と六極成分に対する感受率を零にするコイル配置のもとで、八極成分と十極成分に対する感受率を数値計算で求めた。その結果2個のコイル巻き数比が2で、2個のコイルがそれぞれ回転中心をまたぐような配置が良いことがわかった。コイルの具体的な位置は、ハーモニックスコイルの大きさ、コイルの巻き数、コイル線径などに応じて、工学的な最適位置を計算結果から決めれば良い。これにより、コイルの位置ずれや角度誤差があっても見かけの成分は測定しないで、真の高ハーモニックス成分(八極成分と十極成分)だけ精度よく測定できる。

主成分測定用のものについては四極成分に対する感受率を零にし、六極成分に対する感受率を最大にするコイル配置を求めた。最適なコイル配置は2個の同じコイルが回転中心に対して、対称に配置するものである。これによりハーモニックスコイルの位置ずれがあっても六極成分は正しく測定される。ただし角度の誤差があるとこれに起因する見かけの磁場は含まれてしまう。

参考文献

- [1] M. Bei et al., "The Potential of an Ultimate Storage Ring for Future Light Sources", Nucl. Instr. and Meth. A 622, (2010), 518.
- [2] http://www.spring8.or.jp/ja/about_us/whats_sp8/spring-8_II/publications/.
- [3] K. Fukami, "SPRING-8 upgrade: Strong Magnets for Ultimate Storage Ring", ICFA Beam Dynamics Mini Workshop on Low Emittance Ring 2011, Heraklion, Greece.
- [4] A. K. Jain, "Harmonic Coils", CERN 98-05, 1998, p. 175.