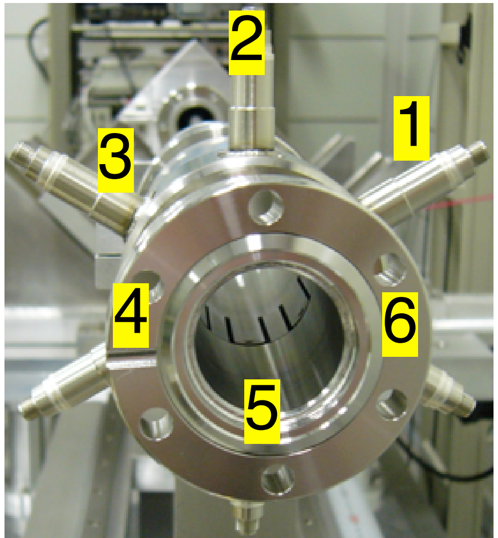
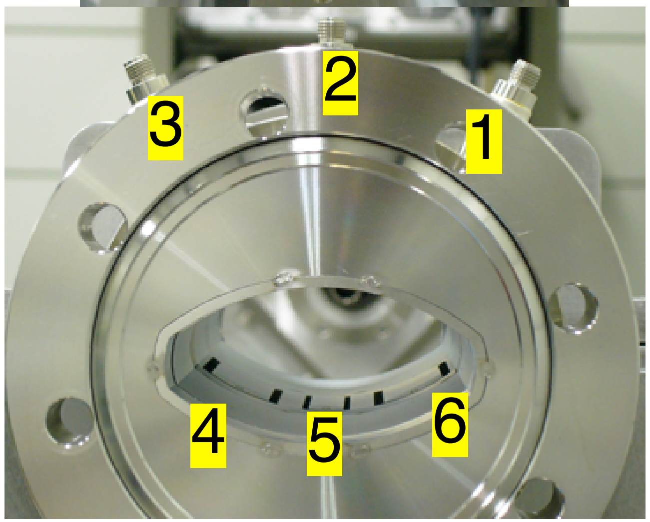
ビーム位置測定に於ける三次モーメントの影響

柳田謙一、鈴木伸介、出羽英紀、花木博文
公益財団法人高輝度光科学研究センター

内容

- はじめに（研究の動機）
- 円形断面BPMによる解析的解法
  - 多粒子系モーメントとダクト内側表面電場
  - 各電極の出力信号電圧
  - 一次モーメントに係わる出力信号電圧差分
  - 最も簡単な点電荷の場合
- シミュレーションとその結果
- まとめと今後の課題





●はじめに（研究の動機）

・SPring-8LINACではビームの横方向二次モーメントを測定する六電極ビーム位置モニタ（BPM）を整備

※二次相対モーメントはビームサイズに関係する量

・最終目標は非破壊でTwissパラメータ等を測定すること

・正確な測定←正確な較正（チャンネル間のバランス係数を求める）

『全体較正』を考案（PASJ9で発表）

・±3mm程度の範囲内でビームを振る（相対モーメントは変化しない）

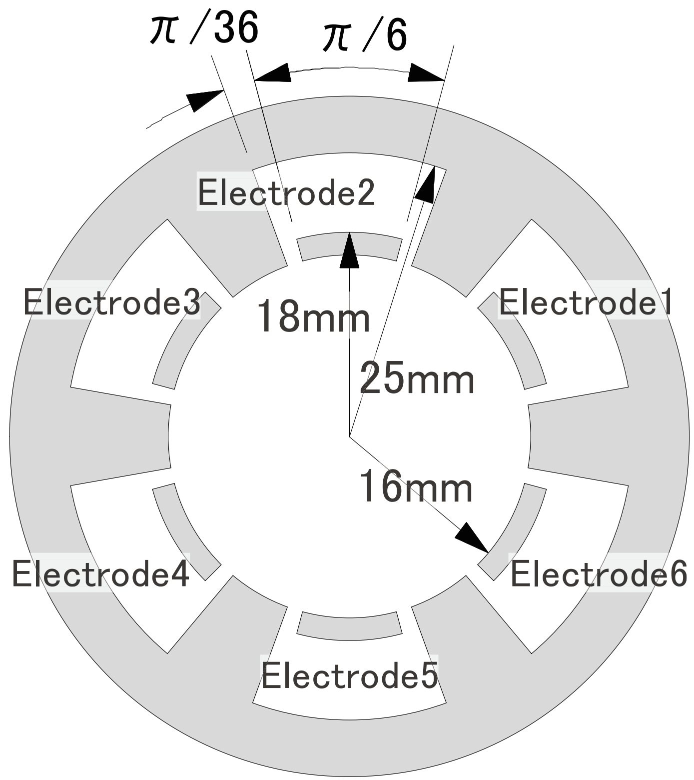
バランス係数を求めるプログラムを作成するも誤動作

ビーム位置が正確に計算されていない（ずれている）のでは？

→原因及び補正方法の追求

●円形断面BPMによる解析的解法

- SPring-8LINACストリップライン型BPM
  →ほぼ静電結合（電場計算のみでOK）
  →出力は電極表面電場積分に比例
- 相対論的電子→二次元電場計算
  電子は長手方向に無限に長い点電荷と仮定
- 円形断面BPM→解析的計算（近似式）
- 準楕円形断面BPM→数値計算



現象を的確に理解するため解析的な手法を採る
→非分散部用円形断面六電極BPMをモデルとして解析を進める

●多粒子系モーメントとダクト内側表面電場

・円形ダクト中心を原点とする

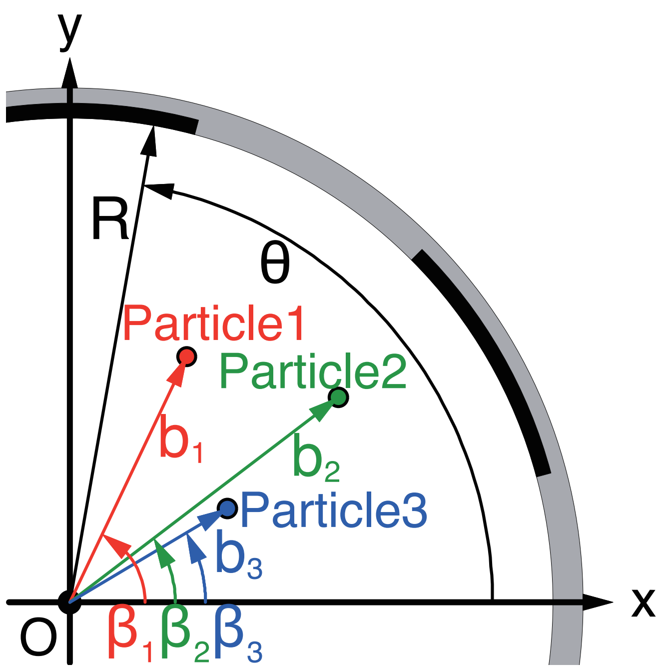
ダクト内表面の位置は(R, θ)で表される

・M粒子系とする

各電子は N のサフィックスで区別される

N番目電子の位置は(b_N, β_N)で表される

・N番目電子がダクト内側表面に作る電場 $E_N(\theta)$



$$E_N(\theta) \propto 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{Nn}\cos n\theta + q_{Nn}\sin n\theta}{R^n}$$ （但し、$b_N \ll R$での近似式）

n : モーメントの次数、p_{Nn}及びq_{Nn} : **N番目電子のn次絶対モーメント**

・M粒子系の電場E(θ)は重ね合わせの原理から

$$E(\theta) = \sum_{N=1}^{M} E_N(\theta)$$

$$\propto 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n\cos n\theta + Q_n\sin n\theta}{R^n}$$

$$P_n = \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{Nn}, Q_n = \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} q_{Nn}$$ **P_n及びQ_n : M粒子系のn次絶対モーメント**

●各電極の出力信号電圧

・各電極の出力信号電圧V_d(d=1,2,…,6) は電極内側表面電場の積分に比例

$$V_d \propto R\int_{\{(4d-3)\pi\}/12}^{\{(4d-1)\pi\}/12} E(\theta)\,d\theta$$

$$\propto \frac{\pi}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{dn}P_n + s_{dn}Q_n}{R^n}$$

$$c_{dn} = \int_{\{(4d-3)\pi\}/12}^{\{(4d-1)\pi\}/12} \cos n\theta\,d\theta$$

$$s_{dn} = \int_{\{(4d-3)\pi\}/12}^{\{(4d-1)\pi\}/12} \sin n\theta\,d\theta$$

これから実際にc_{dn}及びs_{dn}を計算するが、 無限次まで計算出来ない

→nは三次までとする

三次までのc_{dn}及びs_{dn}は以下の六つのパラメータで表される

$$\begin{aligned}
f_1 &= c_{11} = -c_{31} = -c_{41} = c_{61},\\
0 &= c_{21} = c_{51},\\
h_1 &= s_{11} = s_{31} = -s_{41} = -s_{61},\\
2h_1 &= s_{21} = -s_{51},\\
f_2 &= c_{12} = c_{32} = c_{42} = c_{62},\\
2f_2 &= -c_{22} = -c_{52},\\
h_2 &= s_{12} = -s_{32} = s_{42} = -s_{62},\\
0 &= s_{22} = s_{52},\\
f_3 &= 0 = c_{13} = -c_{23} = c_{33} = -c_{43} = c_{53} = -c_{63},\\
h_3 &= s_{13} = -s_{23} = s_{33} = -s_{43} = s_{53} = -s_{63}.
\end{aligned}$$

●一次モーメントに係わる出力信号電圧差分

出力信号電圧差分の定義

$$C_1 = \frac{V_1 - V_3 - V_4 + V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6},$$

$$S_{1A} = \frac{V_2 - V_5}{V_2 + V_5},$$

$$S_{1B} = \frac{V_1 + V_3 - V_4 - V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6}.$$

出力信号電圧差分をPn,Qn,fn,hnで表す

$$C_1 = \frac{12R^2 f_1 P_1 + 12 f_3 P_3}{\pi R^3 + 12 R f_2 P_2}$$

$$= \frac{12 f_1}{\pi R} P_1 \left(1 - \frac{12 f_2}{\pi R^2} P_2\right) + \frac{12 f_3}{\pi R^3} P_3,$$

$$S_{1A} = \frac{24R^2 h_1 Q_1 - 12 h_3 Q_3}{\pi R^3 - 24 R f_2 P_2}$$

$$= \frac{24 h_1}{\pi R} Q_1 \left(1 + \frac{24 f_2}{\pi R^2} P_2\right) - \frac{12 h_3}{\pi R^3} Q_3,$$

$$S_{1B} = \frac{12R^2 h_1 Q_1 + 12 h_3 Q_3}{\pi R^3 + 24 R f_2 P_2}$$

$$= \frac{12 h_1}{\pi R} Q_1 \left(1 - \frac{12 f_2}{\pi R^2} P_2\right) + \frac{12 h_3}{\pi R^3} Q_3.$$

● 実効開口半径

$$R_{C1P1} = \frac{\pi}{6f_1} R = 18.688mm,$$

$$R_{C1P2} = \sqrt{\frac{\pi}{6f_2}} R = 23.155mm,$$

$$R_{C1P3} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6f_3}} R = \infty mm,$$

$$R_{S1A1Q1} = \frac{\pi}{12h_1} R = 16.184mm,$$

$$R_{S1AP2} = \sqrt{\frac{\pi}{12f_2}} R = 16.373mm,$$

$$R_{S1AQ3} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6h_3}} R = 16.570mm,$$

$$R_{S1BQ1} = \frac{\pi}{6h_1} R = 32.368mm,$$

$$R_{S1BP2} = \sqrt{\frac{\pi}{6f_2}} R = 23.155mm,$$

$$R_{S1BQ3} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6h_3}} R = 16.570mm.$$

出力信号電圧差分を実効開口半径で表す

$$C_1 = \frac{2}{R_{C1P1}} P_1 \left(1 - \frac{2}{R_{C1P2}^2} P_2 \right) + \frac{2}{R_{C1P3}^3} P_3,$$

$$S_{1A} = \frac{2}{R_{S1AQ1}} Q_1 \left(1 + \frac{2}{R_{S1AP2}^2} P_2 \right) - \frac{2}{R_{S1AQ3}^3} Q_3,$$

$$S_{1B} = \frac{2}{R_{S1BQ1}} Q_1 \left(1 - \frac{2}{R_{S1BP2}^2} P_2 \right) + \frac{2}{R_{S1BQ3}^3} Q_3.$$

標準化された表式

現在のところ円形断面のバランス係数を求めるプログラムはこの式を用い正常動作
（但し三次相対モーメントのみゼロとしている）

二次三次の絶対モーメントは扱いにくい！！

●最も簡単な点電荷の場合

二電極BPMや四電極BPMでは高次絶対モーメント（P_3やQ_3）は測定出来ない。

ビームの拡がりが無いか、完全円形ビームを仮定する

→高次絶対モーメントは全て高次重心モーメント（p_{G3}やq_{G3}）で置き換え可能

→実際は円形ビームに近ので、重心モーメントでOK

$$P_2 = p_{G2} + \underline{P_{g2}} \rightarrow P_2 = p_{G2} = P_1^2 - Q_1^2,$$

$$P_3 = p_{G3} + \underline{3b_G a_{g2}^2 \cos(\beta_G + 2\alpha_{g2}) + P_{g3}} \rightarrow P_3 = p_{G3} = P_1^3 - 3P_1Q_1^2,$$

$$Q_3 = q_{G3} + \underline{3b_G a_{g2}^2 \sin(\beta_G + 2\alpha_{g2}) + Q_{g3}} \rightarrow Q_3 = q_{G3} = 3P_1^2Q_1 - Q_1^3.$$

上の式を使うと出力信号電圧差分の式は変数がP_1及びQ_1のみの式となる

$$\boxed{\begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{R_{C1P1}} P_1 \left\{ 1 - \frac{2}{R_{C1P2}^2} \left(P_1^2 - Q_1^2 \right) \right\} + \frac{2}{R_{C1P3}^3} \left(P_1^3 - 3P_1Q_1^2 \right), \\ S_{1A} &= \frac{2}{R_{S1AQ1}} Q_1 \left\{ 1 + \frac{2}{R_{S1AP2}^2} \left(P_1^2 - Q_1^2 \right) \right\} - \frac{2}{R_{S1AQ3}^3} \left(3P_1^2Q_1 - Q_1^3 \right), \\ S_{1B} &= \frac{2}{R_{S1BQ1}} Q_1 \left\{ 1 - \frac{2}{R_{S1BP2}^2} \left(P_1^2 - Q_1^2 \right) \right\} + \frac{2}{R_{S1BQ3}^3} \left(3P_1^2Q_1 - Q_1^3 \right). \end{aligned}}$$

シミュレーション

以下の4つのケースを位置(P_1, Q_1)をシミュレートした。

(P'_{1A}, Q'_{1A})

$$C_1 = \frac{2}{R_{C1P1}} P'_{1A},$$

$$S_{1A} = \frac{2}{R_{S1AQ1}} Q'_{1A}.$$

(P_{1A}, Q_{1A})

$$C_1 = \frac{2}{R_{C1P1}} P_{1A} \left\{ 1 - \frac{2}{R_{C1P2}^2} \left(P_{1A}^2 - Q_{1A}^2 \right) \right\} + \frac{2}{R_{C1P3}^3} \left(P_{1A}^3 - 3P_{1A} Q_{1A}^2 \right),$$

$$S_{1A} = \frac{2}{R_{S1AQ1}} Q_{1A} \left\{ 1 + \frac{2}{R_{S1AP2}^2} \left(P_{1A}^2 - Q_{1A}^2 \right) \right\} - \frac{2}{R_{S1AQ3}^3} \left(3P_{1A}^2 Q_{1A} - Q_{1A}^3 \right).$$

(P'_{1B}, Q'_{1B})

$$C_1 = \frac{2}{R_{C1P1}} P'_{1B},$$

$$S_{1B} = \frac{2}{R_{S1BQ1}} Q'_{1B}.$$

(P_{1B}, Q_{1B})

$$C_1 = \frac{2}{R_{C1P1}} P_{1B} \left\{ 1 - \frac{2}{R_{C1P2}^2} \left(P_{1B}^2 - Q_{1B}^2 \right) \right\} + \frac{2}{R_{C1P3}^3} \left(P_{1B}^3 - 3P_{1B} Q_{1B}^2 \right),$$

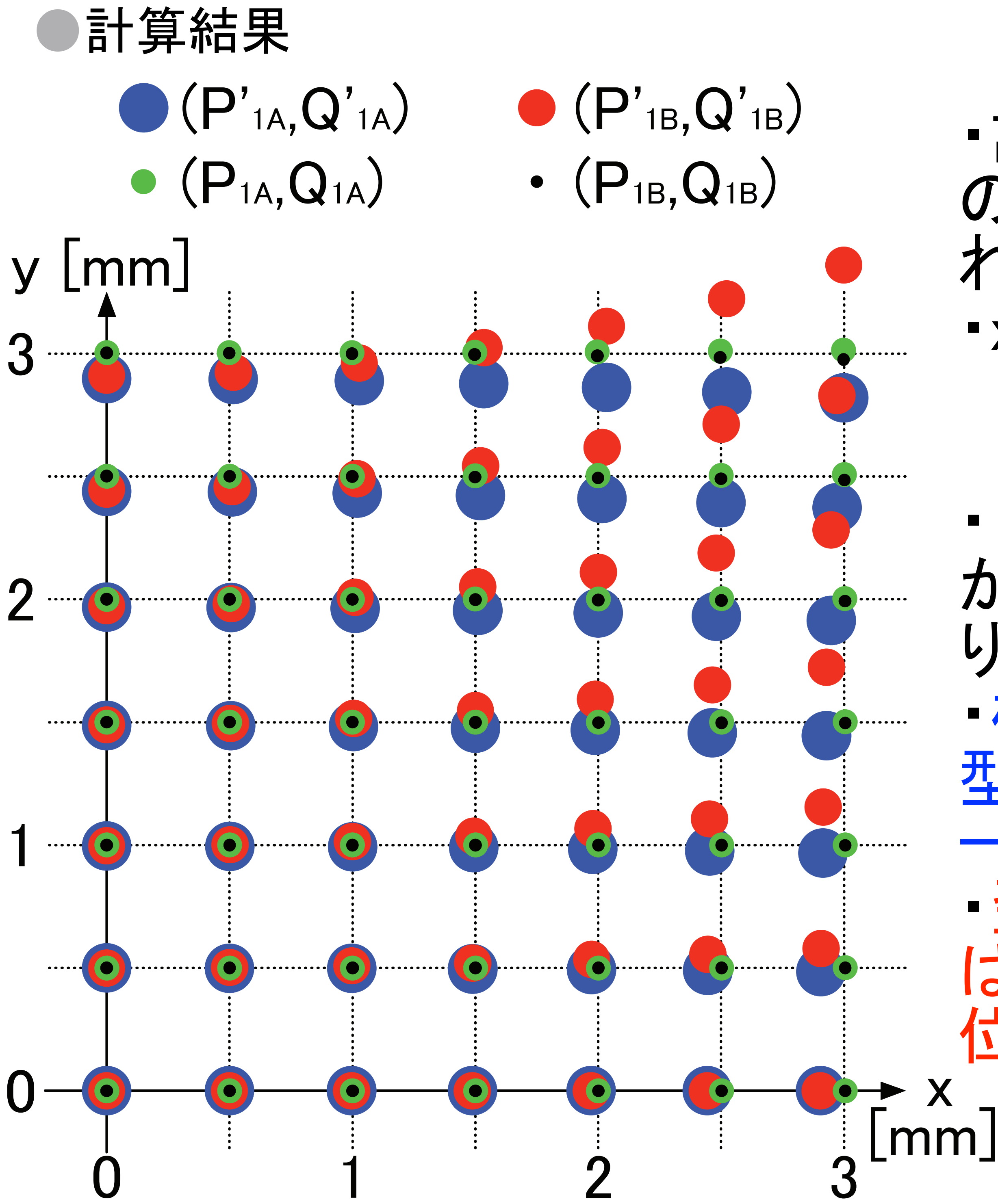
$$S_{1B} = \frac{2}{R_{S1BQ1}} Q_{1B} \left\{ 1 - \frac{2}{R_{S1BP2}^2} \left(P_{1B}^2 - Q_{1B}^2 \right) \right\} + \frac{2}{R_{S1BQ3}^3} \left(3P_{1B}^2 Q_{1B} - Q_{1B}^3 \right).$$

$$C_1 = \frac{V_1 - V_3 - V_4 + V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6}, S_{1A} = \frac{V_2 - V_5}{V_2 + V_5},$$

nは10まで

$$S_{1B} = \frac{V_1 + V_3 - V_4 - V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6}, V_d = \frac{\pi}{12} + \sum_{n=1}^{10} \frac{c_{dn} P_n + s_{dn} Q_n}{R^n}.$$

但し、V_dは$b_N \ll R$での近似式を使用
本来なら数値計算でやるべきだが…



- 計格子点に置いた点電荷の測定位置がどの程度ずれるかを示した
- x=3mm, y=3mmでのずれ
  Q'_{1B}の360 μ m
  Q_{1B}の24 μ m
- ±1mm範囲程度なら良いが、それだと全体較正がやりにくい
- 樽型の分布歪み、糸巻き型の分布歪みには三次モーメントが寄与
- 歪みを解消(**緩和**)するには三次補正項を入れて位置(P_1, Q_1)を計算

●まとめと今後の課題

・『全体較正』では±3mm程度の範囲でビームを振るが、ビーム位置をより正確に計算するため、三次補正項を付加した
→現在のところ円形断面のバランス係数を求めるプログラムは
　正常動作(但し三次相対モーメントのみゼロとしている)
・二電極や四電極BPMを用いた位置測定に於いても、
　重心モーメントのみ(相対モーメントがゼロ)の三次補正項を
　組み込むと測定位置のずれが小さくなる
・今回、時間が無くて、電極からの出力信号電圧Vdは解析的近似式を用いたが、本来はコンピュータを使用した数値計算で行うべきである(行う予定)
　数値計算を行うと、測定位置ずれが若干大きくなると思われる
・準楕円形断面BPMの場合は数値計算で測定位置ずれ
　(歪み)が最小となるように実効開口半径を求める